Approximationsalgorithmen

Wintersemester 2013/2014

Prof. Dr. Georg Schnitger,
Dipl. Inf. Bert Besser

Arbeitsgruppe Theoretische Informatik, Institut für Informatik

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Übungsblatt 1

Ausgabe: 21.10.2013
Abgabe: 28.10.2013

1.1. Aufgabe (4+4) *Approximationserhaltende Reduktionen*

Wir wollen die Beziehung zwischen den beiden folgenden Problemen untersuchen.

- HITTING SET: Gegeben sind das Universum U sowie $S_1, \ldots, S_n \subseteq U$ und die Gewichte $g(u)$ für alle $u \in U$. Bestimme $S \subseteq U$, so dass $S_i \cap S \neq \emptyset$ für alle i (d.h. "jede Menge S_i getroffen wird") und $\sum_{s \in S} g(s)$ minimal ist.
- SET COVER: Gegeben sind das Universum V sowie $T_1, \ldots, T_m \subseteq V$ und die Gewichte $h(T_i)$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$. Finde $T \subseteq \{1, \ldots, m\}$ so dass $\cup_{i \in T} T_i = V$ (d.h. "das Universum V überdeckt wird") und $\sum_{i \in T} h(T_i)$ minimal ist.

a) Zeige, dass jede Instanz von HITTING SET als eine Instanz von SET COVER aufgefasst werden kann. Dazu weise jedem System von Mengen für HITTING SET ein System von Mengen für SET COVER zu und beschreibe die Gewichte der in SET COVER auftretenden Mengen. Lösungen des HITTING SET Problems sollten sich in Lösungen von SET COVER mit gleichem Zielfunktionswert übersetzen.

b) Zeige, dass auch umgekehrt jede Instanz von SET COVER als eine Instanz von HITTING SET aufgefasst werden kann. Auch hier sollen die Zielfunktionswerte übereinstimmen.

1.2. Aufgabe (4+4) *FPTAS und NP-Vollständigkeit*

Es gelte $\mathtt{P} \neq \mathtt{NP}$. $Q = (\max, f, L)$ sei ein NPO Problem, wobei f immer ganzzahlige Werte annimmt.

a) Wir betrachten die unäre Sprachenversion L_Q^* von Q, also

$$L_Q^* = \{(x_0, 1^k) \mid \text{es gibt } x \text{ mit } L(x_0, x) \text{ und } f(x_0, x) \geq k\}.$$

Die Instanz x_0 ist binär kodiert, während der numerische Parameter k unär kodiert ist. Zeige: Wenn L_Q^* NP-vollständig ist, dann besitzt Q kein volles polynomielles Approximationsschema.

b) **Definition:** Ein NPO-Problem heißt polynomiell beschränkt, wenn es ein Polynom q gibt, so dass für jede Instanz x_0 und jede Lösung x die Ungleichung $|f(x_0, x)| \leq q(|x_0|)$ gilt.

Sei Q polynomiell beschränkt. Wir betrachten die Sprachenversion L_Q von Q, also

$$L_Q = \{(x_0, k) \mid \text{es gibt } x \text{ mit } L(x_0, x) \text{ und } f(x_0, x) \geq k\}.$$

Hier sind die Instanz x_0 wie auch der numerische Parameter k binär kodiert. Zeige: Wenn L_Q NP-vollständig ist, dann besitzt Q kein volles polynomielles Approximationsschema.

1.3. Aufgabe (4+4) *Probleme ohne* ***FPTAS***

Wir definieren drei wichtige kombinatorische Probleme. Alle im folgenden eingeführten Zahlen sind nicht negativ, ganzzahlig und unär kodiert.

- 3-PARTITION$_1$: Eine Menge S von $3l$ Zahlen ist gegeben. Für alle $s \in S$ gilt $B/4 < s < B/2$, wobei $\sum_{s \in S} s = lB$. Können die Zahlen aus S in Gruppen $S_1, \ldots, S_l$ (von je drei Zahlen) partitioniert werden, so dass die Summen $\sum_{s \in S_i} s$ alle den gleichen Wert haben?
- BIN-PACKING$_1$: Gegeben sind n Objekte der Größen $g_1, \ldots, g_n$ sowie Bins derselben Kapazität K. Können alle Objekte in höchstens m Bins untergebracht werden, so dass die Kapazität K für kein Bin überschritten wird?
- SCHEDULING$_1$: Gegeben sind n Jobs der Längen $l_1, \ldots, l_n$. Können diese Jobs auf höchstens k Maschinen verteilt werden, so dass der Makespan höchstens M ist? Der Makespan ist der späteste Zeitpunkt zu dem mindestens eine Maschine noch einen Job bearbeitet.

Du kannst annehmen, dass 3-PARTITION$_1$ `NP`-vollständig ist. Zeige, dass sowohl BIN-PACKING$_1$ als auch SCHEDULING$_1$ kein volles polynomielles Approximationsschema besitzt.