Approximationsalgorithmen
Wintersemester 2013/2014
Prof. Dr. Georg Schnitger
Dipl. Inf. Bert Besser
Arbeitsgruppe Theoretische Informatik, Institut für Informatik
GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Übungsblatt 6

Ausgabe: 25.11.2013
Abgabe : 02.12.2013 **vor** Vorlesungsbeginn

6.1. Aufgabe (10) — *d-dimensionales BIN-PACKING*

Im d-dimensionalen BIN-PACKING sind n Objekte gegeben, deren Gewichte durch Vektoren $\vec{g}_i = (g_{i1}, \ldots, g_{id})$ mit $g_{ij} \in [0,1]$ beschrieben werden. Jedes Bin hat die Kapazität $(1,1,\ldots,1)$. Die n Objekte sind in möglichst wenige Bins zu verteilen, so dass jedes Bin B mit einem Gesamtgewicht $\sum_{i\in B} \vec{g}_i$ von höchstens $(1,1,\ldots,1)$ belastet wird, d.h. für alle Koordinaten $j = 1,\ldots,d$ muss gelten:

$$\sum_{i\in B} g_{ij} \leq 1.$$

Beschreibe einen effizienten Approximationsalgorithmus, der höchstens $2d \cdot \text{opt}$ Behälter öffnet.

> Ein Online-Algorithmus muss die Datenelemente der Eingabe der Reihenfolge nach abarbeiten und in jedem Schritt eine unwiderrufliche Entscheidung für das aktuelle Datenelement treffen. Die Reihenfolge, in der die Datenelemente abzuarbeiten sind, ist fest vorgegeben.
>
> Im MAKESPAN-SCHEDULING Problem ist also in jedem Schritt der aktuelle Job unwiderruflich einer Maschine zuzuweisen. Im BIN-PACKING Problem ist in jedem Schritt das aktuelle Objekt unwiderruflich in ein Bin zu legen.

6.2. Aufgabe (4) — *Scheduling auf zwei Maschinen*

Zeige, dass jeder Online-Algorithmus für MAKESPAN-SCHEDULING auf $m = 2$ Maschinen einen Approximationsfaktor von mindestens $\frac{3}{2}$ hat. Konstruiere also für *jeden* Online-Algorithmus für MAKESPAN-SCHEDULING eine Eingabe, so dass für den Makespan M der errechneten Lösung und den optimalen Makespan M^* die Ungleichung $M \geq \frac{3}{2} \cdot M^*$ gilt.

b. w.

6.3. Aufgabe (10) *Die Schallmauer für Online-Algorithmen für BIN-PACKING*

Zeige, dass der Approximationsfaktor eines jeden Online-Algorithmus für BIN-PACKING größer ist als

$$\alpha = \left(\frac{4}{3} - \delta\right) \cdot \mathrm{opt} + c,$$

wobei $\delta > 0$ eine beliebig kleine und $c > 0$ eine beliebig große Konstante ist.

Ein Online-Algorithmus für BIN-PACKING ist also bestenfalls $\frac{4}{3}$-approximativ.

Hinweis: Nimm an, dass es einen Algorithmus A mit Approximationsfaktor α gibt, und betrachte eine Folge von n Objekten der Größe $\frac{1}{2} - \epsilon$ und weiteren n Objekten der Größe $\frac{1}{2} + \epsilon$. Wie viele Bins nutzt A höchstens, wenn die Eingabe nur aus den ersten n Objekten besteht? Wie viele *zusätzliche* Bins nutzt A höchstens, wenn die Eingabe alle $2n$ Objekte enthält? Nutze die beiden Schranken um die Anzahl der Objekte nach oben abzuschätzen. Kannst Du einen Widerspruch zur ersten Schranke finden?