Approximationsalgorithmen

Wintersemester 2013/2014

Prof. Dr. Georg Schnitger
Dipl. Inf. Bert Besser

Arbeitsgruppe Theoretische Informatik, Institut für Informatik

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Übungsblatt 8

Ausgabe: 16.12.2013
Abgabe : **20**.01.2014 **vor** Vorlesungsbeginn

Definition Ein *Bonuspunkt* wird zur erreichten aber nicht zur erreichbaren Punktzahl addiert.

8.1. Aufgabe (2+4+2 Bonuspunkte) *Schlechte Nachbarschaft*

In dieser Aufgabe untersuchen wir den Einfluss des Nachbarschaftsbegriffes auf die Güte der Approximation bei der lokalen Suche. Wir wollen in einem bipartiten Graphen, dessen Kanten Gewichte aus $\mathbb{R}$ haben, ein schwerstmögliches Matching bestimmen. Von einem Matching M lassen wir Übergänge zu den Matchings in der k-Umgebung $U_k(M)$ von M zu:

$$U_k(M) := \left\{ M' \ : \ \left|(M' \setminus M) \cup (M \setminus M')\right| \leq k \right\}.$$

a) Zeige, dass die lokale Suche gemäß U_2 einen beliebig schlechten Approximationsfaktor hat.
b) Zeige, dass die lokale Suche gemäß U_3 einen Approximationsfaktor von mindestens $\frac{1}{2}$ hat. *Hinweis:* Vergleiche ein nicht verbesserbares Matching M mit einem optimalen Matching M^*. Für $e \in M^* \setminus M$ lohnt der Tausch gegen Kanten aus M nicht. Was kostet e? Schätze das Gewicht der Kanten aus $M^* \setminus M$ gegen das Gewicht der Kanten aus $M \setminus M^*$ ab.
c) Zeige, dass die lokale Suche gemäß U_3 einen Approximationsfaktor von höchstens $\frac{1}{2}$ hat.

8.2. Aufgabe (4+4 Bonuspunkte) *Approximation von k-CENTER*

Sei d eine Metrik. Betrachte den folgenden Algorithmus, der als Eingabe eine Punktmenge V und einen Parameter $D \geq 0$ erhält.

```
// Zu Anfang sind alle Punkte in V unmarkiert.
C = ∅
Wiederhole, solange es unmarkierte Punkte in V gibt:
    Füge einen beliebigen unmarkierten Punkt v ∈ V zu C hinzu
    Markiere alle Punkte w ∈ V mit d(w, v) ≤ 2D
```

Sei opt $= \min_{C \subseteq V, |C|=k} \max_{v \in V} \min_{c \in C} d(v, c)$ der beste erreichbare maximale Abstand eines Knotens zum nächstliegenden Zentrum.

a) Zeige: Wenn $D \geq$ opt, dann ist $|C| \leq k$.
b) Gib ein Verfahren an, das den obigen Algorithmus als Subroutine benutzt und für festes $\varepsilon > 0$ in Zeit $\text{poly}(|V|, \log(\max_{v,v' \in V} d(v, v')/\varepsilon))$ eine Menge von höchstens k Zentren berechnet, so dass kein Punkt weiter als $2 \cdot \text{opt} + \varepsilon$ vom nächstenliegenden Zentrum entfernt ist.

8.3. Aufgabe (8) *Approximation von HITTING-SET*

Im HITTING-SET Problem sind Teilmengen $T_1, \ldots, T_k \subseteq U$ eines Universums U und eine Gewichtung $w_u \geq 0$ für alle Elemente $u \in U$ gegeben. Gesucht ist eine leichteste Teilmenge $U' \subseteq U$, die jede Teilmenge T_i in mindestens einem Element trifft, d.h. $U' \cap T_i \neq \emptyset$ gilt für alle i.

Sei $\alpha = \max_i |T_i|$. Beschreibe einen α-approximativen Algorithmus für HITTING-SET.

Hinweis: Wende das Local-Ratio Verfahren an.