Approximationsalgorithmen

Wintersemester 2013/2014

Prof. Dr. Georg Schnitger
Dipl.-Inf. Bert Besser

Arbeitsgruppe Theoretische Informatik, Institut für Informatik

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Übungsblatt 10

Ausgabe: 27.01.2014
Abgabe : 03.02.2014 **vor** Vorlesungsbeginn

Hinweis: Die Übung am 4.2.2014 findet im Raum K III in der neuen Mensa statt.

10.1. Aufgabe (8) *LP-Party*

Ein Party-Service benötigt an N aufeinanderfolgenden Tagen $i = 1, \ldots, N$ jeweils $t_i \in I\!N_0^+$ saubere Teller, die am Ende des Tages schmutzig sind. Der Betreiber kann jeden Tag

- Teller für je K Euro kaufen,
- Teller für je $S < K$ Euro schnell waschen lassen (Dauer: d_S Tage) oder
- Teller für je $L < S$ Euro langsam waschen lassen (Dauer: $d_L > d_S$ Tage).

Jeden Abend muss entschieden werden, wieviele schmutzige Teller schnell bzw. langsam zu waschen sind und wieviele Teller am nächsten Tag gekauft werden. Damit ist das langsame Waschen billiger als das schnelle Waschen, was seinerseits billiger ist als das Kaufen. Anfänglich stehen 0 Teller zur Verfügung. Nach dem Auftrag müssen alle Teller gewaschen sein (auch wenn sie erst nach dem N-ten Tag sauber werden).

Stelle das Problem als lineares Programm dar, d.h. beschreibe alle benötigten Variablen und Ungleichungen sowie die Zielfunktion.

10.2. Aufgabe (2+6) *Integralitätslücken*

Wenn wir in einem binären Maximierungsprogramm P die Forderungen $x_i \in \{0, 1\}$ durch $0 \leq x_i \leq 1$ ersetzen, dann erhalten wir die Relaxation P'. Die Relaxation lässt sich effizient lösen, das binäre Programm im Allgemeinen nicht.

a) Warum gilt $opt(P') \geq opt(P)$? Je größer die *Integralitätslücke* $opt(P') - opt(P)$ ist, um so schlechter ist die Relaxation.

b) Wir forumlieren INDEPENDENT-SET als binäres lineares Programm IS mit der Zielfunktion $\max \sum_{v \in V} x_v$. Wir beabsichtigen, dass die Variable x_v genau dann den Wert 1 annimmt, wenn Knoten v in der Lösung enthalten ist, sonst ist $x_v = 0$. Dass eine Kante $\{u, v\}$ nur einmal berührt werden darf, drücken wir mit der Ungleichung $x_u + x_v \leq 1$ aus. Die Relaxation IS' des Programms ist (für alle Knoten v und alle Kanten $\{u, v\}$):

$$\begin{aligned} 0 \leq x_v &\leq 1 \quad && v \text{ ist ein Knoten,} \\ x_u + x_v &\leq 1 && \{u, v\} \text{ ist eine Kante.} \end{aligned} \tag{IS'}$$

Konstruiere einen Graphen für den die Integralitätslücke in Abhängigkeit der Zahl n aller Knoten möglichst groß ist.

b.w.

10.3. Aufgabe (2+3+3) *Günstige Kantenüberdeckung*

Für ungerichtete Graphen $G = (V, E)$ mit den Kantengewichten $w : E \to I\!R^+$ beschreiben wir eine einheitliche Formulierung von Minimierungsproblemen wie MINIMUM-SPANNING-TREE, STEINER-BAUM oder s, t-PATH finden. Die Lösung besteht einer Kantenmenge F mit minimaler Gewichtssumme.

Die Funktion $f : 2^V \to \{0, 1\}$ zeigt an, ob eine Kante mit genau einem Endpunkt in $V' \subseteq V$ verlangt wird: $f(V') = 1 \Rightarrow \exists\, e \in F : |e \cap V'| = 1$. Es gilt $f(V) = 0$ und $f(V') = f(V \setminus V')$.

Das folgende Programm verwendet den Kanteninzidenzvektor x ($x_e = 1 \Leftrightarrow e \in F$, $x_e = 0$ sonst):

$$\begin{aligned} & \min\, x^T w & & \\ \sum_{e:|V' \cap e|=1} & x_e \geq f(V') & & \forall\, V' : \emptyset \neq V' \subset V \\ & x_e \in \{0, 1\} & & \forall\, e \in E \end{aligned} \qquad (P)$$

Zeige, dass sich die folgenden Probleme durch P bei geeigneter Wahl von f ausdrücken lassen.

a) MINIMUM-SPANNING-TREE.
b) STEINER-BAUM, d.h. für eine Teilmenge $S \subseteq V$ ist ein billigster Baum zu bestimmen, der alle Knoten in S „überspannt".
c) s, t-PATH, d.h. für die Knoten $s, t \in V$ ist ein kürzester Weg von s nach t zu bestimmen.

Es gibt einen Greedyalgorithmus A, der in Zeit $O(n^2 \log_2 n)$ auf dem dualen (Maximierungs-) Programm D zu einer Relaxation P' von P arbeitet und eine Lösung F mit

$$\sum_{e \in F} w_e \leq 2 \cdot opt(D) = 2 \cdot opt(P') \leq 2 \cdot opt(P)$$

ausgibt. Dieser Algorithmus ist also 2-approximativ für alle Probleme, die durch P beschrieben werden können, z.B. für das NP-schwere STEINER-TREE-Problem.