Diskrete Modellierung

Wintersemester 2016/2017

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Fragensammlung

2. Februar 2017

Wenn Sie die folgenden Fragen ohne Hilfe und Blick ins Skript beantworten können, dann dürfen Sie nachts *besonders* ruhig schlafen.
Die Liste ist natürlich nicht vollständig. Bestimmt haben wir das eine oder andere Thema vergessen. Das heißt aber nicht, dass wir es unwichtig finden! Sie sind herzlich dazu eingeladen, eigene Frage-Antwort-Listen zu entwerfen.

Inhalt

Mengenlehre und mathematische Grundlagen

a) Für Mengen M, N, wann gilt $M \subseteq N$, wann $M \in N$?

b) Für eine Menge N, wie sieht $\mathcal{P}(N)$ aus?

c) Gilt für jede Menge M: $\emptyset \subseteq M$? $\emptyset \in M$? $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(M)$? $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$?

d) Sei A eine Menge. Gilt $\mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$?

e) Was ist die Menge $\mathrm{Abb}(A, B)$ und welche Kardinalität besitzt sie bei endlichen A und B?

f) Wie verhält sich die Kardinalität einer Menge A zur Kardinalität ihrer Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$?

g) Welche bzw. wie viele Elemente enthält $M \times N$?

h) Was ist eine Relation? Was ist eine Funktion?

i) Wann ist eine Funktion surjektiv, wann injektiv, wann bijektiv?

j) Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ injektiv, surjektiv, bijektiv? Was ist das Bild von f?

k) Falls es eine injektive Funktion $f : A \to B$ gibt, was lässt sich über die Kardinalitäten von A und B aussagen?

l) Können Sie eine bijektive Funktion $b : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ angeben?

m) Für ein Alphabet Σ, was ist Σ^* bzw. Σ^+? Was ist ε? Und was ist überhaupt ein Alphabet?

Aussagenlogik

a) Wie ist die Menge AL definiert?

b) Wie übersetzt man Umgangssprache in Aussagenlogik?

c) Was ist eine Belegung $\mathcal{B}$? Was ist $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}}$ für eine Formel φ?

d) Wann ist eine Formel φ erfüllbar, falsifizierbar, allgemeingültig, unerfüllbar?

e) Wie viele Zeilen hat die Wahrheitstafel einer Formel φ mit n Variablen?

f) Wie zeigt man eine semantische Folgerung oder Äquivalenz?

g) Gilt $\big((x \to y) \to x\big) \models \big(x \to (y \to x)\big)$?

h) Wie bestimmt man eine DNF, wie eine KNF?

i) Wie sehen DNF und KNF für die Formel $\varphi = \big(A \wedge (B \leftrightarrow C)\big)$ aus?

j) Was sind Primimplikanten, wozu sind sie nütze und wie bestimmt man sie?

k) Welche Primimplikanten besitzt die Formel $\xi = (A \to (B \leftrightarrow (\neg A \wedge C))) \wedge (C \to A)$?

l) Wie modelliert man logische Puzzles à la Sudoku?

m) Was ist der Zweck der Resolution und wie setzt man sie ein?

n) Ist die Formel $\varphi = (a \vee b) \wedge (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee \neg b)$ erfüllbar?

o) Wem gehört der Fisch?

Beweismethoden

a) Welche Beweismethoden kennen Sie aus der Vorlesung?

b) Wie funktioniert die Cantorsche Diagonalisierung? Was lässt sich damit zeigen?

c) Wie zeigt man eine Äquivalenz „$\Longleftrightarrow$“?

d) Wann kann man ein Gegenbeispiel als Beweis benutzen?

e) Was darf man im Induktionsschritt benutzen?

f) Zeigen Sie per Induktion: F.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n^5 - n$ ist durch 5 teilbar.

g) Wie weist man Eigenschaften rekursiv definierter Funktionen nach?

h) Wie sehen Induktionsanfang und -schritt aus, wenn man Eigenschaften über die Fibonacci-Zahlen nachweist?

i) Zeigen Sie $x_k = 3^k$ f.a. $k \in \mathbb{N}$, wobei $x_0 := 1$, $x_1 := 3$ und $x_k := 5x_{k-1} - 6x_{k-2}$ f.a. $k \geq 2$ gelte.

j) Welchen Wert hat $\sum_{i=0}^{n} a^i$ mit $a \neq 1$?

Graphen und Bäume

a) Worin unterscheiden sich gerichtete und ungerichtete Graphen?

b) Was ist der Grad eines Knotens? Was ist ein (einfacher) Kreis?

c) Was ist ein Hamiltonweg/-kreis? Was ist ein Eulerweg/-kreis? Welcher der beiden ist i. A. schwieriger zu finden?

d) Wahr oder falsch: Wenn G einen Euler-/Hamiltonkreis enthält, dann ist G (stark) zusammenhängend.

e) Was ist ein Matching? Was ist ein perfektes Matching?

f) Was sagt die chromatische Zahl eines Graphen aus?

g) Was ist eine konfliktfreie Färbung? Wie viele Farben reichen aus, um einen planaren Graphen zu färben?

h) Wie viele Kanten haben der vollständige Graph K_n und der vollständige bipartite Graph $K_{m,n}$?

i) Welche chromatische Zahl besitzt der Graph K_n, welche besitzt der Graph $K_{m,n}$?

j) Besitzt der Graph $K_{100,200}$ einen Hamiltonweg?

k) Was ergibt $\sum_{v \in V} \mathrm{Grad}_G(v)$?

l) Gibt es einen (un)gerichteten Graphen mit 243 Knoten und 29403 Kanten?

m) Was ist ein ungerichteter Baum? Was ist ein gewurzelter Baum? Was ist ein Wald?

n) Wie hoch kann ein Baum mit n Knoten mindestens/höchstens werden?

o) Wie viele Blätter besitzt ein vollständiger binärer Baum der Tiefe t? Wie viele Blätter besitzt ein vollständiger k-ärer Baum der Tiefe t?

p) Wie modelliert man Zwei-Personen-Spiele mit Bäumen?

q) Wie führt man Induktionsbeweise über Graphen oder Bäume?

r) Zeigen Sie ohne ins Skript zu schauen:
Für jeden endlichen nicht-leeren Baum $B = (V, E)$ gilt $|E| = |V| - 1$.

Markov-Ketten und Page-Rank

a) Wie sieht die Definition des (alten) Page-Rank PR aus der Perspektive des Peer-Reviews aus?

b) Wie sieht die Definition des (neuen) Page-Rank PR^* aus der Perspektive des Zufallssurfers aus?

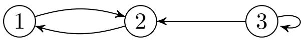
c) Warum benötigen wir den Dämpfungsfaktor?

d) Was ist eine stochastische Matrix, was ist eine Verteilung?

e) Wenn eine Markov-Kette aktuell die Verteilung x besitzt, welche Verteilung besitzt sie nach einem Schritt? Welche Verteilung besitzt sie nach k Schritten?

f) Wann ist ein Graph G irreduzibel bzw. aperiodisch? Wann ist eine Markov-Kette ergodisch?

g) Ist die folgende Kette irreduzibel, aperiodisch, ergodisch?



h) Geben Sie einen Graphen an, der irreduzibel, aber nicht aperiodisch ist; und einen, der aperiodisch, aber nicht irreduzibel ist.

i) Was *bedeutet* Ergodizität?

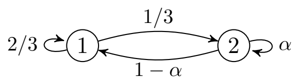
j) Was hat die Grenzverteilung einer ergodischen Kette mit ihrer Übergangsmatrix zu tun?

k) Was ist eine stationäre Verteilung einer Markov-Kette?

l) Wie viele stationäre Verteilungen besitzt eine Markov-Kette mindestens, wie viele höchstens?

m) Wie viele stationäre Verteilungen besitzt eine ergodische Markov-Kette?

n) Berechnen Sie alle stationären Verteilungen von



o) Wie sehen die stationären Verteilungen von symmetrische Ketten, Irrfahrten auf ungerichteten Graphen und der Gambler's-Ruin-Kette aus?

p) Weisen Sie nach, dass die Binomialverteilung eine stationäre Verteilung der Ehrenfest-Kette ist.

Reguläre Sprachen

a) Wie sind reguläre Sprachen definiert?

b) Welche Komponenten besitzt ein DFA, was ist die erweiterte Übergangsfunktion $\hat{\delta}$ und wie ist die von einem DFA A akzeptierte Sprache definiert?

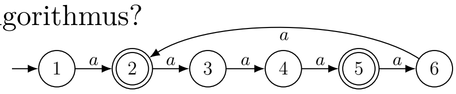
c) Wahr oder falsch: Jeder DFA besitzt mindestens einen akzeptierenden Zustand.

d) Wie sehen DFAs für die Sprachen $L_1 := \{a,b\}^* \cdot \{abaa\}$ und $L_2 := \{c^{3k} : k \in \mathbb{N}_{>0}\}$ aus?

e) Was ist die Verschmelzungsrelation, wie ist sie definiert und wozu ist sie gut?

f) Wie zeigt man die Inäquivalenz zweier Zustände q_i und q_j eines DFAs A? Wie zeigt man die Äquivalenz zweier Zustände?

g) Wie funktioniert der Minimierungsalgorithmus?

h) Ist der folgende Automat minimal? 

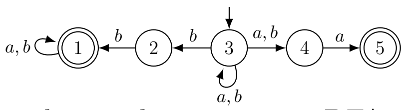
i) Wie sehen die Nerode-Klassen von $L := \{w \in \{a,b,c\}^* : |w| \text{ ist ungerade}\} \cap \{c^n ab : n \in \mathbb{N}\}$ aus? Wie sieht der dazugehörige Nerode-Automat aus?

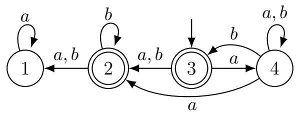
j) Wie hängen der Index einer Sprache L und ein DFA für L zusammen?

k) Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{a^t b^r c^s : t,r,s \in \mathbb{N},\ r > s\}$ nicht-regulär ist.

l) Wahr oder falsch: Die Sprache $\{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a^i b^j c^k : i,j,k \in \mathbb{N}\}$ ist regulär.

m) Aus welchen Komponenten besteht ein NFA und wie ist die von einem NFA akzeptierte Sprache definiert?

n) Welche Sprache akzeptiert folgender NFA? 

o) Wandeln Sie folgenden NFA mit Potenzmengenkonstruktion in einen DFA um. Ist dieser DFA minimal? 

p) Welche Sprachen beschreiben die regulären Ausdrücke $R_1 := (a|ab)^* \cdot \emptyset^*$ und $R_2 := \left(c(a^*|b)^*c\right)^*$?

q) Bestimmen Sie einen regulären Ausdruck R mit $L(R) = \{w \in \{a,b\}^* : w \text{ enthält nicht das Teilwort } ab\}$.

r) Seien R_1 und R_2 reguläre Ausdrücke. Wahr oder falsch: $L((R_1|R_2)^*) = L(R_1^*|R_2^*)$.

Kontextfreie Grammatiken

a) Welche Komponenten besitzt eine kontextfreie Grammatik (KFG)?

b) Bestimmen Sie eine KFG G für die Sprache $L := \{a^i b^j c^k :\ i,j,k \in \mathbb{N},\ i \neq j \text{ oder } j \neq k\}$.

c) Bestimmen Sie eine KFG G für die Sprache aller wohlgeformten Klammerausdrücke über dem Alphabet $\Sigma = \{\ (\ ,\ )\ ,\ [\ ,\ ]\ \}$.

d) Welche Sprache erzeugt die KFG $G = (\Sigma, V, S, P)$ mit $\Sigma := \{a,b,c\}$, $V := \{A,B,C\}$, $S := A$ und $P := \{A \to aAa \,|\, B \,|\, C,\ B \to bBb,\ C \to cC \,|\, A\}$?

e) Wie sehen Ableitungen und Ableitungsbäume für das Wort $(1+2+3)\cdot(3+2)-(1)$ bezüglich der Grammatik G_{AA} aus der Vorlesung aus?

f) Ist die Sprache $\{a,b\}^* \cdot \{abba\}$ kontextfrei?

g) Können Sie drei kontextfreie Sprachen nennen, die nicht regulär sind?

Logik erster Stufe (Prädikatenlogik)

a) Erläutern Sie die Begriffe Signatur, Struktur, Variable, Term, Formel, Interpretation, gebundene bzw. freie Variable, Satz, Interpretation und Modell.

b) Was ist der Unterschied zwischen dem Allquantor $\forall$ und dem Existenzquantor $\exists$?

c) Geben Sie je eine Struktur an, die den Satz $\varphi := \forall x \forall y \forall z \Big(\big(\dot{R}(x,y) \wedge \dot{R}(y,z)\big) \rightarrow \dot{R}(x,z) \Big)$ erfüllt bzw. nicht erfüllt.

d) Gilt stets $\neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi$?

e) Wieso kann jede aussagenlogische Formel auch in Prädikatenlogik ausgedrückt werden? Wie können aussagenlogische Variablen in der Prädikatenlogik „simuliert“ werden?

f) Welche Anwendungsbereiche für Prädikatenlogik haben Sie in Ihrem Studium oder in der Praxis bereits kennengelernt?