Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theoretische Informatik
Prof. Dr. Georg Schnitger

6. April 2017

Diskrete Modellierung (SS 17)
Klausur (Modulabschlussprüfung)

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________ Studiengang: ______________________

⇓ BITTE GENAU BEFOLGEN ⇓

- Außer einem dokumentenechten Schreibstift sind in dieser Klausur keine Hilfsmittel erlaubt. Das Mitbringen nicht zugelassener Hilfsmittel stellt eine Täuschung dar und führt zwangsläufig zum Nichtbestehen der Klausur. Schalten Sie insbesondere Ihre Handys und Smartwatches vor Beginn der Klausur aus.
- Legen Sie Ihre Goethe-Card deutlich sichtbar an Ihren Platz, damit wir während der Klausur Ihre Identität überprüfen können.
- Zur Bearbeitung der Aufgaben stehen Ihnen 120 Minuten zur Verfügung.
- Überprüfen Sie, ob Ihr Exemplar der Klausur alle von 2 bis 18 durchnummerierten Seiten enthält.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen direkt an die dafür vorgesehene Stelle. Notfalls können Sie auch die beigefügten Zusatzblätter am Ende der Klausur benutzen. Weitere Blätter sind auf Nachfrage erhältlich. Wenn Sie Lösungen auf Zusatzblättern notieren, vermerken Sie dies bitte deutlich bei den jeweiligen Aufgabenstellungen.
- Begründungen sind nur dann notwendig, wenn die Aufgabenformulierung diese verlangt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Vornamen sowie Ihre Matrikelnummer.
- Schreiben Sie ausschließlich mit einem dokumentenechten blauen oder schwarzen Stift. Verwenden Sie keinen Bleistift, kein Tipp-Ex, keinen radierbaren Kugelschreiber oder löschbaren Füller.
- Werden zu einer Aufgabe zwei oder mehr Lösungen angegeben, so gilt die Aufgabe als nicht gelöst. Entscheiden Sie sich also immer für **eine** Lösung.
- In der Klausur können Sie maximal 100 Punkte erreichen. Ihre durch die Übungsaufgaben im WS 16/17 erworbenen Bonuspunkte werden zu der in der Klausur erreichten Punktzahl addiert. Erreichen Sie insgesamt $z \geq 50$ Punkte, so ist die Prüfung bestanden. Die Noten verteilen sich wie folgt:

Note	z	Note	z	Note	z	Note
1:			$z \geq 95$	$1,0$	$95 > z \geq 90$	$1,3$
2:	$90 > z \geq 85$	$1,7$	$85 > z \geq 80$	$2,0$	$80 > z \geq 75$	$2,3$
3:	$75 > z \geq 70$	$2,7$	$70 > z \geq 65$	$3,0$	$65 > z \geq 60$	$3,3$
4:	$60 > z \geq 55$	$3,7$	$55 > z \geq 50$	$4,0$		

Aufgabe	**1a**	**1b**	**1c**	**2a**	**2b**	**2c**	**3a**	**3b**	**3c**	**4a**	**4b**	**4c**	**4d**	**5**
maximale Punkte	8	7	6	8	6	7	12	4	4	5	8	10	8	7
erreichte Punkte														
summiert														

Viel Erfolg!

	Klausur	**Bonus**	**Gesamt**
maximal	100	15	115
erreicht			

Note:

Aufgabe 1: Aussagenlogik

(a) Ein Verbrechen ist geschehen. Es gibt drei Tatverdächtige, nämlich A, B und C. Man weiß: **[8 Pkte]**

Indiz 1: Mindestens zwei Verdächtige sind beteiligt.
Indiz 2: C ist beteiligt, wenn auch A beteiligt ist.
Indiz 3: Genau einer der Verdächtigen A und C ist beteiligt.

Formalisieren Sie die drei Indizien durch je eine aussagenlogische Formel.

$\varphi_{\text{Indiz 1}} :=$ (2 Pkte)

$\varphi_{\text{Indiz 2}} :=$ (2 Pkte)

$\varphi_{\text{Indiz 3}} :=$ (2 Pkte)

Bestimmen Sie *alle* Verdächtigen, die tatsächlich an der Tat beteiligt waren.
Begründen Sie Ihre Antwort. Eine direkte Argumentation mithilfe der drei Indizien genügt, Sie können aber auch die untenstehende Wahrheitstafel verwenden.

(2 Pkte)

Tatbeteiligte(r):

Begründung:

A	**B**	**C**	$\varphi_{\text{Indiz 1}}$	$\varphi_{\text{Indiz 2}}$	$\varphi_{\text{Indiz 3}}$	
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

(b) **[7 Pkte]**

(i) Geben Sie an, ob die aussagenlogische Formel (3 Pkte)

$$\varphi := \neg A \wedge \neg B \wedge (A \vee B)$$

erfüllbar und/oder falsifizierbar ist.

Kreuzen Sie **alle** richtigen Antworten an.

φ ist **erfüllbar:** ☐ ja ☐ nein

φ ist **falsifizierbar:** ☐ ja ☐ nein

Falls φ **erfüllbar** ist, geben Sie eine Belegung an, die φ erfüllt:

Falls φ **falsifzierbar** ist, geben Sie eine Belegung an, die φ falsifiziert:

(ii) Leiten Sie den leeren Disjunktionsterm ϵ mittels **Resolution** aus der Menge (4 Pkte)

$$K := \Big\{ \{A, B\}, \{\neg A\}, \{\neg B, \neg C\}, \{A, C\} \Big\}$$

von Disjunktionstermen her.

Geben Sie alle Schritte Ihres Resolutionsbeweises an. Geben Sie für jeden Schritt an, welche Disjunktionsterme (ob zu K gehörig oder zwischenzeitlich abgeleitet) benutzt werden.

(c) **[6 Pkte]**

(i) Geben Sie eine zur Formel (3 Pkte)

$$\psi := (A \to B) \land (B \to C) \land (C \to A)$$

äquivalente Formel ψ' in **konjunktiver** Normalform (KNF) an.
(Wenn Sie Ihren Lösungsweg angeben, können Sie Teilpunkte auch bei falscher Lösung erhalten.)

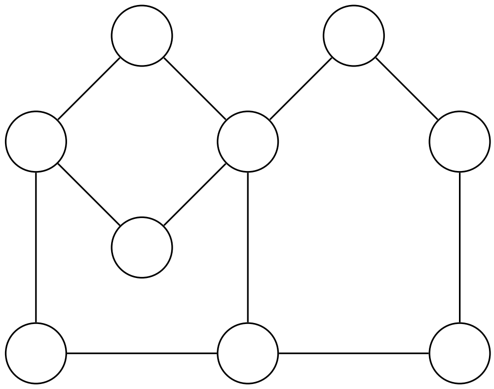
(ii) Gelten die folgenden Aussagen für *beliebige* aussagenlogische Formeln φ und ψ? (3 Pkte)
Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl für diese Teilaufgabe ist aber mindestens 0.

- Wenn $\varphi \models \psi$ und $\psi \models \varphi$, dann gilt $\varphi \equiv \psi$. ☐ wahr ☐ falsch
- ψ ist allgemeingültig $\iff$ $\mathbf{1} \models \psi$ ☐ wahr ☐ falsch
- ψ ist allgemeingültig $\iff$ $\psi \models \mathbf{1}$ ☐ wahr ☐ falsch

Aufgabe 2: Graphen

(a) **[8 Pkte]**

(i) Bestimmen Sie für den folgenden Graphen $G = (V, E)$ eine konfliktfreie Färbung $f : V \to \mathbb{N}$ mit möglichst wenigen Farben. Tragen Sie die Farben direkt in die Knoten ein. (4 Pkte)

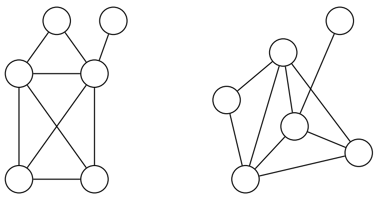


Beweisen Sie, dass G mit weniger Farben nicht konfliktfrei färbbar ist.

Bestimmen Sie die chromatische Zahl von G:

$\chi(G) =$ ____________

(ii) Gegeben seien die Graphen G_1 und G_2.



G_1 G_2

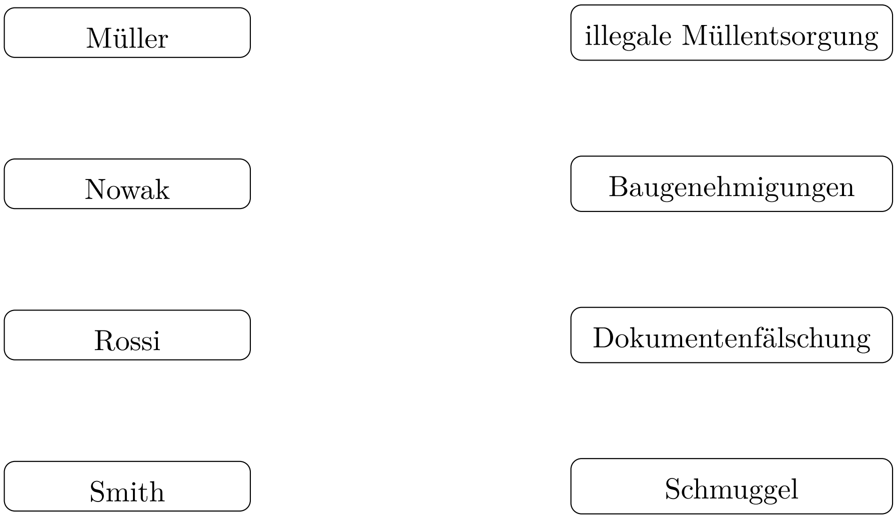
Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0. (4 Pkte)

- G_1 und G_2 sind isomorph. ☐ wahr ☐ falsch
- Sei $d \in \mathbb{N}_{>0}$. Der d-dimensionale Würfel kann mit zwei Farben konfliktfrei gefärbt werden. ☐ wahr ☐ falsch
- Der vollständige ungerichtete Graph K_5 ist planar. ☐ wahr ☐ falsch
- Jeder Knoten eines gerichteten Graphen befindet sich in genau einer starken Zusammenhangskomponente. ☐ wahr ☐ falsch

(b) Die vier Mafia-Familien Müller, Nowak, Rossi und Smith möchten ein Kartell bilden und die vier Geschäftszweige *illegale Müllentsorgung*, *Baugenehmigungen*, *Dokumentenfälschung* und *Schmuggel* untereinander aufteilen, wobei jede Familie genau einen Geschäftszweig übernehmen soll. Aufgrund bestehender Verträge darf jede Familie nur in bestimmten Geschäftszweigen aktiv sein. Es gibt folgende Vorgaben: **[6 Pkte]**

- Die illegale Müllentsorgung darf von jeder Familie übernommen werden.
- Familie Nowak darf im Schmuggel-Geschäft aktiv sein.
- Familie Rossi darf alles außer zu schmuggeln.
- Dokumentenfälschung ist den Familien Rossi und Smith vorbehalten.

(i) Modellieren Sie die Vorgaben durch einen ungerichteten Graphen G. (2 Pkte)



(ii) Welches graphentheoretische Problem in G muss gelöst werden, damit die Aufteilung aller Geschäftszweige unter den Familien gelingt? (2 Pkte)

(iii) Können alle Geschäftszweige unter den Familien aufgeteilt werden? Beweisen Sie Ihre Antwort. (2 Pkte)

(c) Beweisen Sie die folgende Aussage für alle $h \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion: **[7 Pkte]**

Jeder Binärbaum der Höhe h hat höchstens 2^h Blätter.

Beweis:

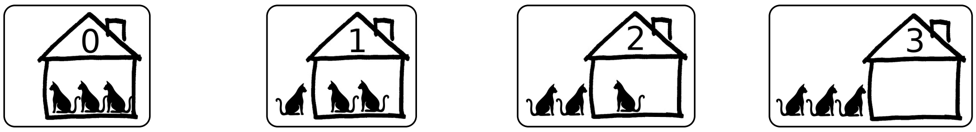
Aufgabe 3: Markov-Ketten

(a) Alice besitzt drei Katzen, die sich entweder draußen oder in ihrer Wohnung aufhalten. Durch eine Katzenklappe können sie die Wohnung jederzeit betreten oder verlassen. **[12 Pkte]**

Wir nehmen an, dass in jedem Zeitschritt eine der drei Katzen zufällig ausgewählt wird und den Ort wechselt, d. h. die Wohnung betritt (wenn sie vorher draußen war) oder die Wohnung verlässt (wenn sie vorher drinnen war).

(i) Modellieren Sie das Verhalten der Katzen durch eine Markov-Kette (G, P). Der Zustand i drücke aus, dass sich genau i Katzen draußen befinden. (6 Pkte)

Geben Sie die **Übergangsmatrix** P sowie den **Graphen** G (in graphischer Darstellung) an und beschriften Sie dessen Kanten mit den Übergangswahrscheinlichkeiten.



$$P = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & \square & \square & \square & \square \\ 1 & \square & \square & \square & \square \\ 2 & \square & \square & \square & \square \\ 3 & \square & \square & \square & \square \end{array}$$

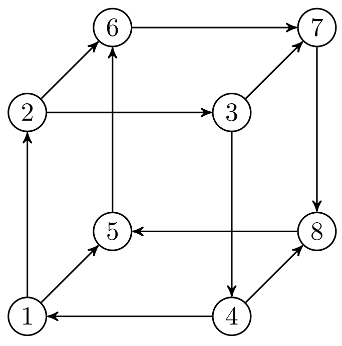
(ii) Ist die Markov-Kette (G, P) ergodisch? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Pkte)

☐ ja ☐ nein

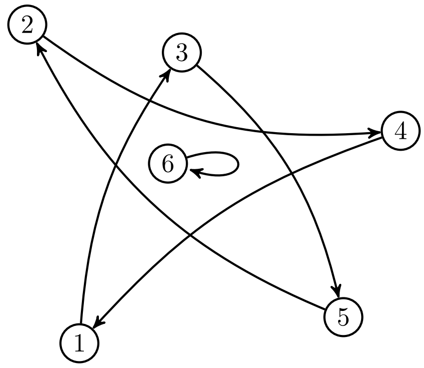
Begründung:

(iii) Geben Sie eine stationäre Verteilung $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ an. Sie dürfen dabei ausnutzen, dass $\pi_0 = \pi_3$ und $\pi_1 = \pi_2$ gilt. (4 Pkte)

(b) Betrachten Sie die folgenden Graphen G_1 und G_2: **[4 Pkte]**



G_1



G_2

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

G_1 ist aperiodisch.	☐ ja	☐ nein
G_1 ist irreduzibel.	☐ ja	☐ nein
G_2 ist aperiodisch.	☐ ja	☐ nein
G_2 ist irreduzibel.	☐ ja	☐ nein

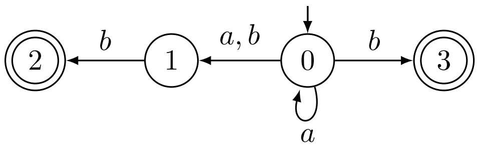
(c) Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0. **[4 Pkte]**

Sei $M = (G, P)$ eine **ergodische** Markov-Kette. Dann gilt immer ...

M besitzt mindestens eine stationäre Verteilung.	☐ ja	☐ nein
M besitzt höchstens eine stationäre Verteilung.	☐ ja	☐ nein
$P_{i,j} > 0$ gilt für alle i, j.	☐ ja	☐ nein
Die Grenzverteilung $\mathcal{G}(M)$ besitzt nur Einträge > 0.	☐ ja	☐ nein

Aufgabe 4: Endliche Automaten und reguläre Sprachen

(a) Gegeben sei der folgende NFA N über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$. **[5 Pkte]**



(i) Welche der folgenden Worte liegen in der Sprache $L(N)$, welche nicht? Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0. (3 Pkte)

Wort	... liegt in $L(N)$?	
b	☐ ja	☐ nein
$aaab$	☐ ja	☐ nein
aba	☐ ja	☐ nein

(ii) Beschreiben Sie die Sprache $L(N)$ durch einen regulären Ausdruck. (2 Pkte)

(b) Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Die Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sei wie folgt definiert: **[8 Pkte]**

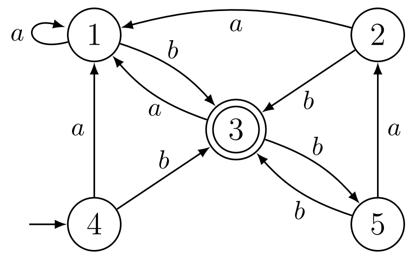
$$L := \{w \in \Sigma^* : |w| \geq 2, \text{ der letzte und der vorletzte Buchstabe von } w \text{ sind verschieden}\}$$

(i) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, so dass $L(R) = L$. (2 Pkte)

(ii) Konstruieren Sie einen DFA D mit **genau fünf** Zuständen für L. (6 Pkte)

(c) **[10 Pkte]**

(i) Der folgende DFA A über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ sei gegeben:



Bestimmen Sie den Äquivalenzklassenautomaten A' für A. Geben Sie A' in graphischer Darstellung an. (6 Pkte)
(Wenn Sie Zwischenschritte angeben, können Sie auch bei falscher Lösung Teilpunkte erhalten.)

(Sie können folgende Vorlage verwenden.)

2				
3				
4				
5				
	1	2	3	4

Äquivalenzklassenautomat A':

(ii) Sei $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA, seien $q, p \in Q$ und sei $a \in \Sigma$. (4 Pkte)
Zeigen Sie:

$$\text{Wenn } p \equiv_D q, \text{ dann gilt auch } \delta(p, a) \equiv_D \delta(q, a).$$

Beweis durch Widerspruch:

(d) Für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ sei die Sprache $L_n = \{w \in \{a,b\}^* : |w|_a \leq n, |w|_b \leq n\}$ gegeben. **[8 Pkte]**

(i) Zeigen Sie folgende Inäquivalenz bzgl. der Nerode-Relation: $a^n \not\equiv_{L_n} a^{n-1}b$ (2 Pkte)

Beweis:

(ii) Zeigen Sie: $\text{Index}(L_n) \geq n^2$. (6 Pkte)

Beweis:

Aufgabe 5: Kontextfreie Grammatiken

[7 Pkte]

Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $G := (\Sigma, V, S, P)$ mit

$$V := \{S\},\ \Sigma := \{0,1\},\ P := \{S \to SS \mid 0S1 \mid 1S0 \mid \varepsilon\}.$$

(i) Geben Sie **zwei verschiedene** Ableitungsbäume für das Wort $w_1 := 1010$ an. (2 Pkte)

(ii) Geben Sie einen Ableitungsbaum für das Wort $w_2 := 110001$ an. (2 Pkte)

(iii) Beschreiben Sie die Sprache $L(G)$ mathematisch oder umgangssprachlich. (3 Pkte)