Diskrete Modellierung

Wintersemester 2017/18

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

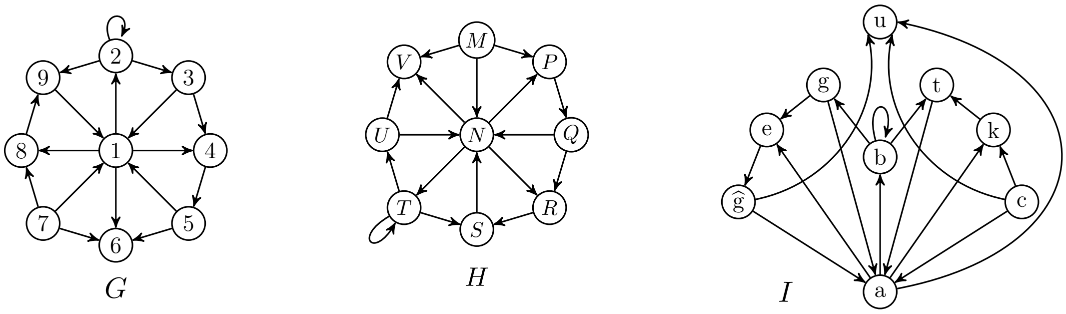
Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 8

Ausgabe: 07.12.17
Abgabe: 14.12.17

Aufgabe 8.1 *Isomorphie, Planarität, Bipartitheit* $((8+8)+2+10 = 28$ Punkte)

Die Graphen G, H und I seien wie folgt in grafischer Darstellung gegeben.



G H I

a) i) Zeigen Sie: G und H sind nicht isomorph.
 ii) Geben Sie einen Isomorphismus von G nach I an.

b) Ist I planar?

c) Zeigen Sie: Für jedes $d \in \mathbb{N}_{>0}$ ist der d-dimensionale Würfel $W_d = (V_d, E_d)$ bipartit.

Zur Erinnerung: $V_d = \{0,1\}^d$ und
$E_d = \big\{\{u,v\} : u,v \in V_d,\ u \text{ und } v \text{ unterscheiden sich in genau einem Bit}\big\}$

Aufgabe 8.2 *Entscheidungsbäume* $(10+2+8 = 20$ Punkte)

Für ein $n \in \mathbb{N}$ seien 2^n Münzen gegeben, die wir im Folgenden mit $M_1, \ldots, M_{2^n}$ bezeichnen. Genau eine der Münzen ist schwerer als alle anderen. Diese Münze lässt sich mithilfe einer Balkenwaage mit dem folgenden Verfahren finden:

1. Falls $n = 0$, ist die einzige vorhandene Münze die gesuchte.
2. Ansonsten vergleiche das Gesamtgewicht der Münzen aus der Menge $A := \{M_1, \ldots, M_{2^{n-1}}\}$ mit dem Gesamtgewicht der Münzen aus der Menge $B := \{M_{2^{n-1}+1}, \ldots, M_{2^n}\}$.
 Ist das Gesamtgewicht von A größer als das von B, muss sich die gesuchte Münze in A befinden und das Verfahren wird rekursiv auf die Menge A angewendet, andernfalls wird es rekursiv auf die Menge B angewendet.

a) Beschreiben Sie das Verfahren für $n = 2$ durch einen Entscheidungsbaum. Wählen Sie hierfür geeignete Knotenbeschriftungen, wobei die Abfolge der Wiegevorgänge eindeutig aus den Beschriftungen abzulesen sein soll.

b) Welchen Situationen im Entscheidungsprozess entsprechen die inneren Knoten bzw. die Wurzel des Baumes? Welcher Situation entspricht ein Blatt?

c) Wie viele Wiegevorgänge werden im obigen Verfahren für 2^n Münzen im besten Fall, also mindestens, durchgeführt? Wie viele Wiegevorgänge werden im schlimmsten Fall, also höchstens, durchgeführt?

Bitte wenden!

Aufgabe 8.3 *Syntaxbäume und Rekursionsbäume* (8 + 7 + (6 + 6) = 27 Punkte)

a) Geben Sie für die Formel $\varphi := \Big(\neg(A \leftrightarrow B) \rightarrow \big((C \vee B) \oplus \neg\neg D\big)\Big)$ einen Syntaxbaum an.

b) Betrachte die Funktion `fibonacci_naiv`, die auf naive Art die n-te Fibonacci-Zahl $\mathrm{fib}(n)$ (siehe Beispiel 4.19 im Skript) rekursiv berechnet:

```
def fibonacci_naiv(n):
    if n <= 2:
        return 1
    else:
        return fibonacci_naiv(n-2) + fibonacci_naiv(n-1)
```

Geben Sie den Rekursionsbaum Baum(6) für den Aufruf `fibonacci_naiv`(6) in grafischer Darstellung an. Beschriften Sie jeden Knoten, der einem Aufruf `fibonacci_naiv`(p) entspricht, mit dem Parameter p. Ist Baum(6) ein Binärbaum? Ist er ein voller Binärbaum? Ist er ein vollständiger Binärbaum?

c) Betrachte die Funktion `prod` für die Russische Bauernmultiplikation (vgl. Aufgabe 6.3):

```
def prod(x,k):
    if k == 0:
        return 0
    elif k % 2 == 0:                # k ist gerade und groesser 0
        return prod(2*x, k/2)
    else:                           # k ist ungerade
        return prod(2*x, k//2) + x  # k//2 entspricht der
                                    # ganzzahligen Division (k-1)/2
```

i) Geben Sie den Rekursionsbaum Baum$(12, 21)$ für den Aufruf `prod`$(12, 21)$ in grafischer Darstellung an. Beschriften Sie jeden Knoten, der einem Aufruf `prod`(x, k) entspricht, mit dem Tupel (x, k).

ii) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Tiefe des Rekursionsbaums Baum$(x,\ 2^n)$.

Aufgabe 8.4 *Vollständige k-äre Bäume* (25 Punkte)

Sei $k \geq 2$. Ein gewurzelter Baum $B = (V, E)$ ist ein *vollständiger k-ärer Baum*, falls gilt:

- für jeden Knoten $v \in V$ gilt Aus-Grad$_B(v) = k$ oder v ist ein Blatt
- und alle Blätter von B haben dieselbe Tiefe.

Zeigen Sie: Ein vollständiger k-ärer Baum der Tiefe t besitzt genau $\frac{k^{t+1}-1}{k-1}$ Knoten.

Hinweis: Benutzen Sie eine vollständige Induktion nach t.

Bitte wenden!

Aufgabe 8.5* *Bonusaufgabe* (4 + 8 + 8 = 20* Extrapunkte)

Betrachten Sie die Operationen **Löschen** bzw. **Kontraktion** auf einem endlichen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$.

1. Beim **Löschen** darf eine Kante aus E entfernt werden oder ein Knoten aus V (mitsamt aller inzidenter Kanten) entfernt werden.

2. Sei $\{u, v\} \in E$ und $w \notin V$. Eine **Kontraktion** der Kante $\{u, v\}$ erzeugt aus G einen neuen Graphen $G' = (V', E')$ mit

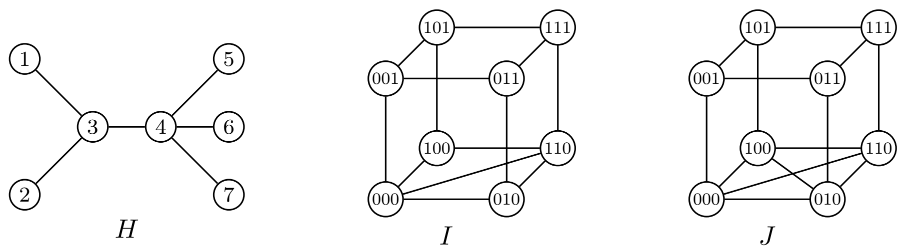
$$
\begin{aligned}
V' =& (V \setminus \{u, v\}) \cup \{w\} \\
E' =& \Big(E \setminus \{e \in E : u \in e \text{ oder } v \in e\}\Big) \\
& \cup \Big\{\{w, x\} : x \notin \{u, v\} \text{ und } \big(\{u, x\} \in E \text{ oder } \{v, x\} \in E\big)\Big\}
\end{aligned}
$$

Anschaulich: Eine Kontraktion verschmilzt eine Kante $\{u, v\}$ mitsamt ihrer beiden Endknoten zu einem neuen Knoten w. Alle Knoten (ausgenommen u und v), die in G mit u bzw. v benachbart waren, sind in G' mit w benachbart.

Mithilfe dieser beiden Operationen können wir zeigen, dass ein Graph nicht planar ist.

Satz von Wagner. Ein ungerichteter Graph G ist genau dann nicht planar, wenn es eine Folge von Kontraktionen, Knoten- bzw. Kantenlöschungen gibt, sodass aus G ein Graph erzeugt werden kann, der zu K_5 oder $K_{3,3}$ isomorph ist. ◇

Seien nun die Graphen H, I und J wie folgt in grafischer Darstellung gegeben:



a) Führen Sie eine Kontraktion der Kante $\{3, 4\}$ im Graphen H durch. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

b) Zeigen oder widerlegen Sie: I ist planar.

c) Zeigen oder widerlegen Sie: J ist planar.