Diskrete Modellierung

Wintersemester 2017/18

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 11

Ausgabe: 11.01.18
Abgabe: 18.01.18

Aufgabe 11.1 *Grundbegriffe endlicher Automaten* $(12 + 8 + 5 = 25$ Punkte)

Der DFA A sei durch das folgende Python-Programm gegeben:

```
def dfa(word):                  # word bestehe nur aus den Symbolen 'a', 'b', 'c'
    state = 0                   # Anfangszustand
    for symbol in word:         # Lies jedes Symbol des Eingabewortes
        if state == 0:          # aktueller Zustand: 0
            if symbol == 'a':
                state = 1       # Uebergang von 0 nach 1: delta(0,a) = 1
            elif symbol == 'b':
                state = 0
            else:
                state = 2
        elif state == 1:
            if symbol == 'a':
                state = state - 1
            if symbol == 'c':
                state = 2
        elif state == 2:
            state = 2

    if state == 0:
        return (state, True)    # Eingabewort akzeptieren
    else:
        return (state, False)   # Eingabewort verwerfen
```

Kommentar: Wir haben diese nicht sehr elegante Implementierung gewählt, um verschiedene Implementierungsmöglichkeiten von DFAs darzustellen.

a) Geben Sie A (mit dem Alphabet $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$) als Zustandsdiagramm an.

b) Welche der folgenden Wörter liegen in $L(A)$, welche nicht?

- $w_1 := \varepsilon$
- $w_2 :=$ `baba`
- $w_3 :=$ `abaa`
- $w_4 :=$ `acbab`

Hinweis: Als Begründung können Sie beispielsweise den Zustand des Automaten nach dem Lesen des jeweiligen Wortes w_i angeben.

c) Beschreiben Sie die vom DFA A akzeptierte Sprache $L(A) \subseteq \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^*$ mathematisch oder umgangssprachlich.

Bitte wenden!

Aufgabe 11.2 *Äquivalenzrelationen* (12 + 4 + 9 = 25 Punkte)

a) Sei $R = \{(1,3),(2,2),(2,5),(3,1),(3,3),(4,2)\}$ eine Relation über der Menge $A = \{1,2,3,4,5\}$. Welche Paare $(x,y) \in A \times A$ müssen zu R mindestens hinzugefügt werden, um Relationen R_r, R_s und R_t zu erhalten, sodass

i) R_r reflexiv ist? ii) R_s symmetrisch ist? iii) R_t transitiv ist?

iv) Welche Äquivalenzklassen besitzt die Äquivalenzrelation $R_ä$, die aus R mit der geringsten Anzahl hinzugefügter Paare $(x,y) \in A \times A$ entsteht?

Es sind keine Begründungen nötig.

b) Gegeben sei die Relation $R_{\text{SI}} = \{(\varphi, \psi) \in \text{AL}^2 : \varphi \models \psi\}$ der semantischen Implikation über der Menge AL der aussgenlogischen Formeln.

Zeigen Sie, dass R_{SI} *keine* Äquivalenzrelation ist, indem Sie ein Gegenbeispiel zur Reflexivität, Symmetrie oder Transitivität angeben.

c) Sei $G = (V, E)$ ein endlicher gerichteter Graph und sei

$$R_{\text{SZ}} = \{(u,v) \in V^2 : u \text{ und } v \text{ liegen in derselben starken Zusammenhangskomponente von } G\}$$

eine Relationen über V. Zeigen Sie, dass R_{SZ} eine Äquivalenzrelation ist.

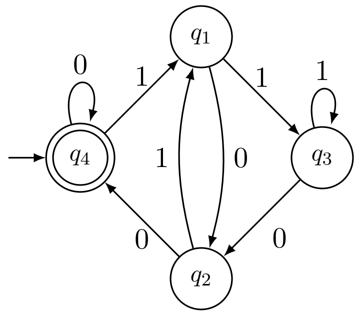
Aufgabe 11.3 *Teilbarkeit und Verschmelzungsrelation* (12 + 13 = 25 Punkte)

Mithilfe deterministischer endlicher Automaten soll die Teilbarkeit von natürlichen Zahlen in Binärdarstellung untersucht werden. Sei $\Sigma = \{0,1\}$. Wir identifizieren jedes Wort $w = w_1 w_2 \ldots w_{|w|} \in \Sigma^*$ mit der natürlichen Zahl

$$z_2(w) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{|w|} \left(w_i \cdot 2^{|w|-i}\right), & \text{falls } w \neq \varepsilon \\ 0, & \text{falls } w = \varepsilon. \end{cases}$$

Das Wort $w = w_1 \ldots w_{|w|} \in \Sigma^*$ ist also die Darstellung der natürlichen Zahl $z_2(w)$ im binären Zahlensystem. Beispielsweise ist $z_2(110) = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 6$.

a) Betrachten Sie den rechts abgebildeten DFA A über Σ.



i) Weisen Sie die folgenden Inäquivalenzen bzgl. der Verschmelzungsrelation $\equiv_A$ nach, indem Sie geeignete Zeugen angeben.

- $q_1 \not\equiv_A q_2$
- $q_2 \not\equiv_A q_4$

ii) Gibt es in A zwei verschiedene Zustände q_i und q_j mit $q_i \equiv_A q_j$? Begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie außerdem alle Äquivalenzklassen der Verschmelzungsrelation $\equiv_A$ an.

iii) Welche Sprache akzeptiert A? Geben Sie eine umgangssprachliche Beschreibung an.

b) Gegeben sei die Sprache $L := \{w \in \Sigma^* : z_2(w) \text{ ist durch 3 teilbar}\}$.

i) Geben Sie einen DFA B mit drei Zuständen q_0, q_1 und q_2 und $L(B) = L$ an. Erläutern Sie kurz die Idee hinter Ihrer Lösung. Sie müssen nicht beweisen, dass $L(B) = L$ gilt.

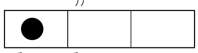
ii) Weisen Sie die Inäquivalenzen $q_0 \not\equiv_B q_1$, $q_0 \not\equiv_B q_2$ und $q_1 \not\equiv_B q_2$ bzgl. der Verschmelzungsrelation durch geeignete Zeugen nach.

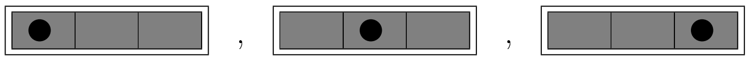
Aufgabe 11.4 *Modellierung: Lichtchaos im Smart Home* (15 + 5 + 5 = 25 Punkte)

Als großer Fan moderner Technologie haben Sie (hier durch ● dargestellt) sich in der vorlesungsfreien Zeit eine intelligente Lichtanlage in den drei Räumen („links“, „Mitte“, „rechts“) Ihrer Wohnung installiert. Allerdings ist Ihnen bei der Programmierung der Anlage ein Fehler unterlaufen:

- Wenn Sie den mittleren Raum verlassen, werden in allen drei Räumen die Lichtschalter invertiert, d.h. wo vorher das Licht angeschaltet ist, wird es nun ausgeschaltet und umgekehrt.
- Wenn Sie den linken (bzw. rechten) Raum verlassen, werden die Lichtschalter links (bzw. rechts) und in der Mitte invertiert. Versuchen Sie im linken Raum nach links oder im rechten Raum nach rechts zu laufen, bleiben die Lichtschalter unverändert.

Bis spät in die Nacht sitzen Sie im linken Raum und suchen vergeblich Ihren Programmierfehler, während in allen drei Räumen das Licht angeschaltet ist. Da Sie sehr müde sind, aber nur schlafen können, wenn in jedem der drei Räume das Licht ausgeschaltet ist, wandern Sie nun durch die Wohnung und versuchen mithilfe Ihrer falsch programmierten Lichtanlage in allen drei Räumen das Licht auszuschalten.

a) Wir modellieren alle Wanderungen durch die drei Räume durch einen DFA $A=(\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$. Wir benutzen das Alphabet $\Sigma = \{\mathtt{L}, \mathtt{R}\}$, wobei `L` für „nach links“ und `R` für „nach rechts“ gehen stehe. Der DFA habe den Startzustand $q_0 =$  (d. h. alle Lichter sind an und Sie stehen im linken Raum) und die Menge F der akzeptierenden Zustände

$F \subseteq \{$  $\}$

(d. h. alle Lichter sind aus und Sie stehen in einem der drei Räume). Berücksichtigen Sie in der Menge Q genau die Zustände, die vom Startzustand aus erreichbar sind!

Geben Sie das Zustandsdiagramm des DFAs an. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

Hinweis: Ordnen Sie die Zustände Ihres DFAs so an, dass sich die Zustände, die Ihren Aufenthalt im linken, mittleren bzw. rechten Raum repräsentieren, in Ihrer Darstellung links, in der Mitte bzw. rechts befinden.

b) Können Sie alle drei Lichter ausschalten? Wenn ja, wie? Wenn nein, wieso nicht?

c) Angenommen, Sie müssen in jedem Schritt den Raum wechseln, dürfen aber den nächsten Raum (wenn eine Wahlmöglichkeit besteht) selbst aussuchen. Können Sie vermeiden, in einen akzeptierenden Zustand zu gelangen?

Bonusaufgabe 11.5. *Abschlusseigenschaften* (20* Extrapunkte)

Sei Σ ein Alphabet, $w \in \Sigma^+$ ein Wort und $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Wir definieren die beiden Sprachen

$$w^{-1}L := \left\{ x \in \Sigma^* : wx \in L \right\} \text{ und}$$
$$\text{Präfix}(L) := \left\{ x \in \Sigma^* : \text{es gibt ein } y \in \Sigma^* \text{ mit } xy \in L \right\}.$$

Zeigen Sie: Wenn L eine reguläre Sprache ist, dann ist auch

a) $w^{-1}L$ regulär.

b) $\text{Präfix}(L)$ regulär.

Hinweis: Konstruieren Sie jeweils ausgehend von einem DFA A für die Sprache L neue DFAs A' bzw. A'' für $w^{-1}L$ bzw. für $\text{Präfix}(L)$.