Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theoretische Informatik
Prof. Dr. Georg Schnitger

29. März 2018

# Diskrete Modellierung (WS 17/18)
# Klausur (Modulabschlussprüfung)

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________ Studiengang: ______________________

**⇓ BITTE GENAU BEFOLGEN ⇓**

- Außer einem dokumentenechten Schreibstift sind in dieser Klausur keine Hilfsmittel erlaubt. Das Mitbringen nicht zugelassener Hilfsmittel stellt eine Täuschung dar und führt zwangsläufig zum Nichtbestehen der Klausur. Schalten Sie insbesondere Ihre Handys und Smartwatches vor Beginn der Klausur aus.
- Legen Sie Ihre Goethe-Card deutlich sichtbar an Ihren Platz, damit wir während der Klausur Ihre Identität überprüfen können.
- Zur Bearbeitung der Aufgaben stehen Ihnen 120 Minuten zur Verfügung.
- Überprüfen Sie, ob Ihr Exemplar der Klausur alle von 2 bis 18 durchnummerierten Seiten enthält.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen direkt an die dafür vorgesehene Stelle. Notfalls können Sie auch die beigefügten Zusatzblätter am Ende der Klausur benutzen. Weitere Blätter sind auf Nachfrage erhältlich. Wenn Sie Lösungen auf Zusatzblättern notieren, vermerken Sie dies bitte deutlich bei den jeweiligen Aufgabenstellungen.
- Begründungen sind nur dann notwendig, wenn die Aufgabenformulierung dies explizit verlangt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Vornamen sowie Ihre Matrikelnummer.
- Schreiben Sie ausschließlich mit einem dokumentenechten blauen oder schwarzen Stift. Verwenden Sie keinen Bleistift, kein Tipp-Ex, keinen radierbaren Kugelschreiber oder löschbaren Füller.
- Werden zu einer Aufgabe zwei oder mehr Lösungen angegeben, so gilt die Aufgabe als nicht gelöst. Entscheiden Sie sich also immer für **eine** Lösung.
- In der Klausur können Sie maximal 100 Punkte erreichen. Ihre durch die Übungsaufgaben im WS 17/18 erworbenen Bonuspunkte werden zu der in der Klausur erreichten Punktzahl addiert. Erreichen Sie insgesamt $z \geq 50$ Punkte, so ist die Prüfung bestanden. Die Noten verteilen sich wie folgt:

| Note | $z$ | Note | $z$ | Note | $z$ | Note |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1: | | | $z \geq 95$ | $1,0$ | $95 > z \geq 90$ | $1,3$ |
| 2: | $90 > z \geq 85$ | $1,7$ | $85 > z \geq 80$ | $2,0$ | $80 > z \geq 75$ | $2,3$ |
| 3: | $75 > z \geq 70$ | $2,7$ | $70 > z \geq 65$ | $3,0$ | $65 > z \geq 60$ | $3,3$ |
| 4: | $60 > z \geq 55$ | $3,7$ | $55 > z \geq 50$ | $4,0$ | | |

| Aufgabe | **1a** | **1b** | **1c** | **2a** | **2b** | **2c** | **3a** | **3b** | **3c** | **4a** | **4b** | **4c** | **4d** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| maximale Punkte | 8 | 6 | 7 | 5 | 8 | 7 | 10 | 4 | 8 | 8 | 5 | 9 | 9 | 6 |
| erreichte Punkte | | | | | | | | | | | | | | |
| summiert | | | | | | | | | | | | | | |

Viel Erfolg!

| | **Klausur** | **Bonus** | **Gesamt** |
|---|---|---|---|
| maximal | 100 | 15 | 115 |
| erreicht | | | |

**Note:**

## Aufgabe 1: Aussagenlogik

(a) Es sollen industriell hergestellte Rezepturen aus den Stoffen $A, B$ und $C$ hergestellt werden. Allerdings müssen die folgenden Einschränkungen eingehalten werden. **[8 Pkte]**

**Einschränkung 1:** Genau einer der drei Stoffe $A, B$ oder $C$ ist zu verwenden.

**Einschränkung 2:** Stoff $A$ muss genau dann verwendet werden, wenn zwar $B$, nicht aber $C$ eingesetzt wird.

**Einschränkung 3:** Stoff $B$ ist sehr aggressiv und muss, wenn eingesetzt, mit mindestens einem der beiden anderen Stoffe kombiniert werden.

Formalisieren Sie die drei Einschränkungen durch je eine aussagenlogische Formel.

$\varphi_{\text{Einschränkung 1}} :=$ (2 Pkte)

$\varphi_{\text{Einschränkung 2}} :=$ (2 Pkte)

$\varphi_{\text{Einschränkung 3}} :=$ (2 Pkte)

Geben Sie alle Rezepturen an, die allen Einschränkungen genügen und begründen Sie Ihre Antwort. Eine direkte Argumentation mithilfe der drei Einschränkungen genügt.

(2 Pkte)

Mögliche Rezepturen:

Begründung:

(b) **[6 Pkte]**

(i) Betrachten Sie die aussagenlogische Formel (2 Pkte)

$$\varphi := \big((X \oplus Y) \oplus Z\big) \leftrightarrow \big((X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow Z\big)$$

und kreuzen Sie die richtige Antwort an.

Die Formel $\varphi$ ist
- ☐ erfüllbar und falsifizierbar,
- ☐ allgemeingültig,
- ☐ unerfüllbar.

(ii) Leiten Sie den leeren Disjunktionsterm $\epsilon$ mittels **Resolution** aus der Menge (4 Pkte)

$$K := \Big\{\ \{B, C\}, \{\neg B, \neg C\}, \{\neg A, \neg C\}, \{A, B\}, \{\neg B, C\}\ \Big\}$$

von Disjunktionstermen her.

Geben Sie **alle** Schritte Ihres Resolutionsbeweises an. Geben Sie für jeden Schritt an, welche Disjunktionsterme (ob zu $K$ gehörig oder zwischenzeitlich abgeleitet) benutzt werden.

$\{B, C\}$ $\quad$ $\{\neg B, \neg C\}$ $\quad$ $\{\neg A, \neg C\}$ $\quad$ $\{A, B\}$ $\quad$ $\{\neg B, C\}$

(c) **[7 Pkte]**

(i) Geben Sie eine zu (3 Pkte)

$$\psi := \neg Z \wedge \Big(\big((X \wedge Y) \oplus Z\big) \vee \big(X \wedge \neg Y\big)\Big)$$

äquivalente Formel $\psi_{\text{DNF}}$ in **disjunktiver** Normalform (DNF) an.
(Wenn Sie Ihren Lösungsweg angeben, können Sie Teilpunkte auch bei falscher Lösung erhalten.)

$\psi_{\text{DNF}} =$

*Sie können die untenstehende Wahrheitstafel verwenden.*

| **X** | **Y** | **Z** | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | |
| 0 | 1 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 1 | |
| 1 | 1 | 0 | |
| 1 | 1 | 1 | |

(ii) Gegeben sei ein $m\times n$-Schachbrett $\mathcal{S}{:=}\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}$ mit $m$ Zeilen und $n$ Spalten. Auf jedem Feld des Brettes darf eine Dame platziert werden, wobei die folgenden Regeln eingehalten werden müssen: (4 Pkte)

**Regel 1:** In Spalte 2 steht keine Dame.

**Regel 2:** Die Platzierungen der Damen in Zeile 4 und Zeile 5 sind identisch.

Verwenden Sie im Folgenden für alle $(i, j) \in \mathcal{S}$ die Variable $D_{i,j}$ mit der Bedeutung „auf dem Feld $(i, j)$ in Zeile $i$ und Spalte $j$ steht eine Dame“.

Formalisieren Sie die beiden Regel durch je eine Formel.

$\varphi_{\text{Regel 1}} =$

$\varphi_{\text{Regel 2}} =$

## Aufgabe 2: Graphen

(a) In einer Fußballmannschaft spielen vier Verteidigerinnen (Verena, Viola, Victoria, Vroni); in der gegnerischen Mannschaft spielen vier Angreiferinnen (Anna, Alina, Alexa, Amelie). **[5 Pkte]**

Jede Verteidigerin kann höchstens eine Angreiferin bewachen und jede Angreiferin soll von genau einer Verteidigerin bewacht werden. Doch wie?

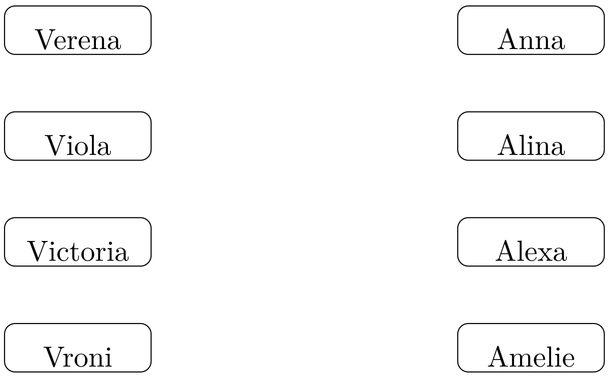
Die Trainerin entscheidet:

„Wenn eine Verteidigerin eine Angreiferin in der Vergangenheit foulte, darf diese Verteidigerin die jeweilige Angreiferin im nächsten Spiel nicht bewachen.“

Folgende Fouls gab es bereits:

- Verena foulte schon Anna, Alexa und Amelie.
- Viola beging Fouls gegen Anna und Alexa.
- Nur Alexa wurde noch nicht von Victoria gefoult.
- Vronis Fouls gegen Alina und Amelie erlangten traurige Berühmtheit.

(i) Modellieren Sie die Fouls durch einen ungerichteten Graphen, wobei jede Kante zwischen einer Verteidigerin und einer Angreiferin ein Foul repräsentiert. (2 Pkte)

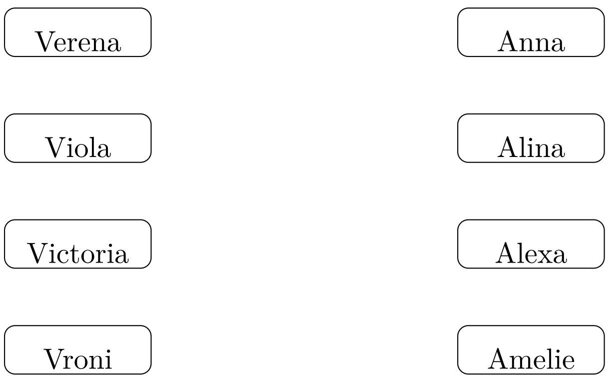



(ii) Können alle Angreiferinnen bewacht werden? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 Pkte)

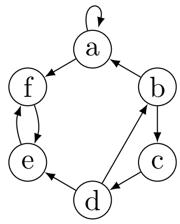
☐ ja ☐ nein

*Begründung:*

*Sie dürfen die folgende Vorlage für Ihre Antwort benutzen.*



(b) Gegeben sei der Graph $G$. **[8 Pkte]**




(i) Geben Sie in $G$ alle starken Zusammenhangskomponenten an. (2 Pkte)

(ii) Geben Sie einen Hamiltonweg in $G$ an. (1 Pkt)

$w = \big($

(iii) Hat $G$ einen Hamiltonkreis? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Pkte)

☐ ja ☐ nein

*Begründung:*

(iv) Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl für diese Teilaufgabe ist aber mindestens 0. (3 Pkte)

- Es gibt einen gerichteten Graphen mit 8 Knoten und 60 Kanten. ☐ wahr ☐ falsch
- Der dreidimensionale Würfel $W_3$ ist planar. ☐ wahr ☐ falsch
- Jeder gerichtete endliche azyklische Graph mit mindestens einem Knoten besitzt einen Knoten mit Ein-Grad 0. ☐ wahr ☐ falsch

(c) (i) Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und seien $i, j \in V$ zwei verschiedene Knoten, zwischen denen keine Kante verläuft, d.h. $\{i, j\} \notin E$. **[7 Pkte]**

Sei $G' = (V, E')$ mit $E' = E \cup \{\{i, j\}\}$ der ungerichtete Graph, der aus $G$ entsteht, indem die Kante zwischen $i$ und $j$ hinzugefügt wird.

Zeigen Sie: Für die chromatische Zahl von $G'$ gilt $\chi(G') \leq \chi(G) + 1$. (4 Pkte)

| |
|---|
| *Beweis:* |

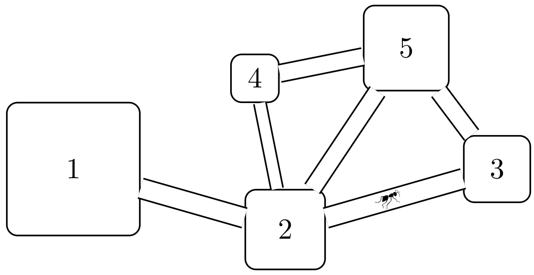
(ii) Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter bipartiter Graph mit $V = V_1 \cup V_2$, dessen Kanten nur zwischen den disjunkten Knotenmengen $V_1$ und $V_2$ verlaufen. Zeigen Sie: (3 Pkte)

$$\sum_{u \in V_1} \mathrm{Grad}_G(u) = \sum_{v \in V_2} \mathrm{Grad}_G(v)$$

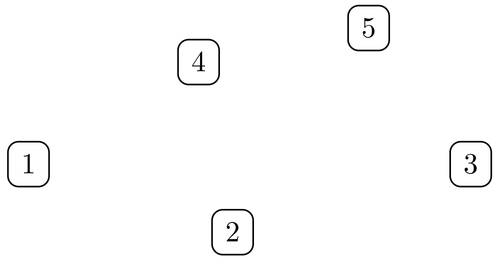
| |
|---|
| *Beweis:* |

## Aufgabe 3: Markov-Ketten

(a) Arnold, die Ameise, spaziert auf zufällige Weise von Höhle zu Höhle durch seinen Ameisenbau. In jedem Schritt wählt er zufällig mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit eine der Nachbarhöhlen aus, und begibt sich dorthin. Der Ameisenbau sieht wie folgt aus: **[10 Pkte]**




(i) Modellieren Sie Arnolds Irrfahrt durch den Ameisenbau durch eine Markov-Kette $(G, P)$. Der Zustand $i$ drücke aus, dass sich Arnold im Höhle $i$ befindet. (4 Pkte)
Geben Sie den Graphen $G$ der Kette in graphischer Darstellung an und beschriften Sie seine Kanten mit den Übergangswahrscheinlichkeiten.



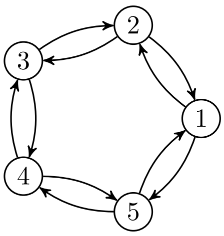

(ii) Ist die Markov-Kette $(G, P)$ ergodisch? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Pkte)

☐ ja ☐ nein

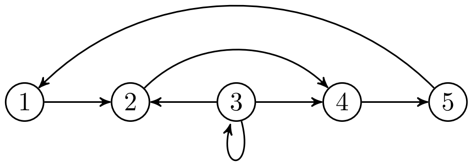
*Begründung:*

(iii) Geben Sie eine stationäre Verteilung $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5)$ von $(G, P)$ an. (4 Pkte)

(b) Betrachten Sie die folgenden Graphen $G_1$ und $G_2$: **[4 Pkte]**




$G_1$

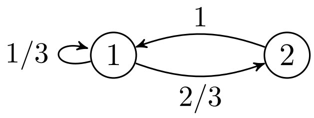



$G_2$

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

| | | |
|---|---|---|
| $G_1$ ist aperiodisch. | ☐ wahr | ☐ falsch |
| $G_1$ ist irreduzibel. | ☐ wahr | ☐ falsch |
| $G_2$ ist aperiodisch. | ☐ wahr | ☐ falsch |
| $G_2$ ist irreduzibel. | ☐ wahr | ☐ falsch |

(c) Betrachten Sie die folgende Markov-Kette $\mathcal{M} := (G, P)$ **[8 Pkte]**




(i) Stellen Sie die Übergangsmatrix $P$ auf. (1 Pkt)

$P =$

(ii) Die Markov-Kette beginne mit der Verteilung $\pi^{(0)} = \big(1,\, 0\big)$. (6 Pkte)

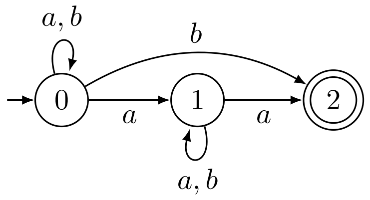
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:
Die Markov-Kette besitzt nach $k$ Schritten die Verteilung

$$\pi^{(k)} = \frac{1}{5}\Big(3 + 2 \cdot \left(-\tfrac{2}{3}\right)^k,\, 2 - 2 \cdot \left(-\tfrac{2}{3}\right)^k\Big).$$

(iii) Bestimmen Sie die Grenzverteilung von $\mathcal{M}$. (1 Pkt)
(Sie dürfen Teil (ii) auch dann verwenden, wenn Sie ihn nicht gelöst haben.)

## Aufgabe 4: Endliche Automaten und reguläre Sprachen

(a) Gegeben sei der folgende NFA $N$ über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$. **[8 Pkte]**




(i) Welche der folgenden Wörter liegen in der Sprache $L(N)$, welche nicht? Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl für diese Teilaufgabe ist aber mindestens 0. (3 Pkte)

| Wort | $\ldots \in L(N)$? | |
|---|---|---|
| $ab$ | ☐ ja | ☐ nein |
| $bab$ | ☐ ja | ☐ nein |
| $bbbaababa$ | ☐ ja | ☐ nein |

(ii) Beschreiben Sie die Sprache $L(N)$ durch einen regulären Ausdruck. (2 Pkte)

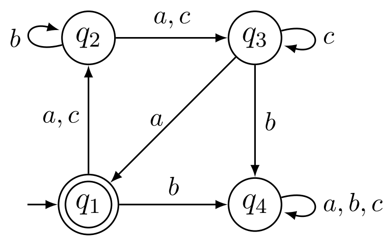
(iii) Sei $R = (a|b)^*a(a|b)$ ein regulärer Ausdruck über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$. Geben Sie einen NFA $N'$ an, so dass $L(R) = L(N')$ gilt. (3 Pkte)

(b) Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Die Sprache $L$ sei wie folgt definiert: **[5 Pkte]**

$$L := \Big\{ w \in \Sigma^* : |w| \geq 2, \text{der erste und der letzte Buchstabe von } w \text{ sind verschieden} \Big\}$$

Konstruieren Sie einen DFA $D$ mit **genau fünf** Zuständen für $L$.

(c) (i) Der folgende DFA $A_1$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ sei gegeben: **[9 Pkte]**



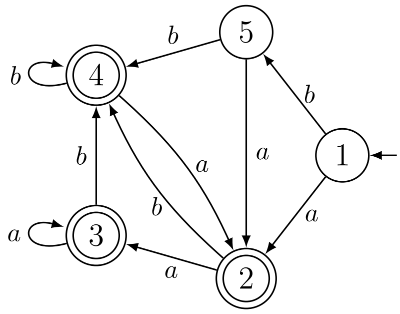

Geben Sie jeweils einen Zeugen für folgende Inäquivalenzen bezüglich der Verschmelzungsrelation an. (3 Pkte)

Zeuge für $q_2 \not\equiv_{A_1} q_1$:

Zeuge für $q_2 \not\equiv_{A_1} q_3$:

Zeuge für $q_2 \not\equiv_{A_1} q_4$:

(ii) Der folgende DFA $A_2$ über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ sei gegeben: (6 Pkte)




Bestimmen Sie den Äquivalenzklassenautomaten $A_2'$ für $A_2$. Geben Sie das Zustandsdiagramm von $A_2'$ an.
(Wenn Sie Zwischenschritte angeben, können Sie auch bei falscher Lösung Teilpunkte erhalten.)

*(Sie können folgende Vorlage verwenden.)*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 |

Äquivalenzklassenautomat $A_2'$:

(d) **[9 Pkte]**

(i) Geben Sie die Definition der Nerode-Relation an. (3 Pkte)

Sei $\Sigma$ ein Alphabet, $L \subseteq \Sigma^*$ und $x, y \in \Sigma^*$.

Dann gilt $x \equiv_L y$ genau dann, wenn ...

(ii) Zeigen Sie $\text{Index}(L) = \infty$ für die folgende Sprache: (6 Pkte)

$$L := \{a^n b^k a^n : n, k \in \mathbb{N}\}$$

*Beweis:*

## Aufgabe 5: Kontextfreie Grammatiken

**[6 Pkte]**

(i) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (\Sigma, V, S, P)$ an, so dass gilt: (3 Pkte)

$$L(G) = \{a^m b^n \ : \ m, n \in \mathbb{N},\ m \leq n\}$$

$G = (\Sigma, V, S, P)$

$V = \Big\{$

$P = \Big\{$

(ii) Seien $G_1 = (\Sigma, V_1, S_1, P_1)$ und $G_2 = (\Sigma, V_2, S_2, P_2)$ kontextfreie Grammatiken mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. (3 Pkte)
Konstruieren Sie eine KFG $G = (\Sigma, V, S, P)$, so dass

$$L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$$

gilt, d. h. so dass $G$ genau die Wörter erzeugt, die $G_1$ oder $G_2$ erzeugen.

$G = (\Sigma, V, S, P)$

$V =$

$P =$