

# Diskrete Modellierung

Prof. Dr. Georg Schnitger  
Wintersemester 2018/19

# Diskrete Modellierung

Prof. Dr. Georg Schnitger  
Wintersemester 2018/19

Herzlich willkommen!

# Organisatorisches

Bitte konsultieren Sie die Webseite

<http://www.tinygu.de/dismod1819>

**regelmäßig!**

- Alle Vorlesungsmaterialien (**Skript**, **Folien**, Zugang zu **Videos** wie auch **Extra-Materialien**) finden Sie auf dieser Seite.
- Auch organisatorische Details zum Übungsbetrieb und zur Notengebung werden beschrieben.
- Unter **Aktuelles** finden Sie zum Beispiel:
  - ▶ Wie melde ich mich zum Übungsbetrieb an?
  - ▶ Gegebenenfalls Anmerkungen zu aktuellen Übungsaufgaben.
- Im **Logbuch** finden Sie Informationen zu den einzelnen Vorlesungsstunden.

Die Vorlesung wird sich eng am **Skript** orientieren. Bitte nicht nur Folien oder Videos anschauen, sondern das Skript sorgfältig durcharbeiten!

- U. Kastens und H. Kleine Büning. *Modellierung. Grundlagen und formale Methoden*. Hanser, 2008.
- D. Grieser. *Mathematisches Problemlösen und Beweisen*, Springer Verlag.
- A. Beutelspacher. „*Das ist o.B.d.A. trivial!*“ *Tipps und Tricks zur Formulierung mathematischer Gedanken*. Vieweg Studium.

Der **Handapparat** für die Diskrete Modellierung enthält weitere relevante Textbücher, auf die wir auch im Logbuch verweisen werden: Bitte schmökern!

- Der Handapparat befindet sich in der **Bibliothek**, also im ersten Stock in der Robert-Mayer-Straße 11-15.

# Übungen und Klausur

- Die Erstklausur wird am Donnerstag, dem **28. Februar 2019** und die Zweitklausur am Donnerstag, dem **4. April 2019** stattfinden.
  - ▶ Der Ort wird jeweils noch bekanntgegeben.
- Die in den Übungen erreichten Punkte werden mit einem Maximalgewicht von **15%** zu den Klausurpunkten hinzugezählt:

*Wenn in der Klausur  $x\%$  und in den Übungen  $y\%$  erzielt wurden, dann wird  $z = x + \frac{15}{100} \cdot y$  als Gesamtpunktzahl angerechnet.*

Die Note hängt nur von der Gesamtpunktzahl  $z$  ab. Die Veranstaltung ist bestanden, falls  $z \geq 50$  gilt.

- Übungen finden wöchentlich statt:
  - ▶ Übungszettel werden spätestens am Dienstag ins Netz gestellt,
  - ▶ Die Lösungen,
    - ★ zusammengetackert und mit Namen und Matrikelnummer, Gruppennummer und Tutor sowie dem Titel der Veranstaltung (Dismod) versehen, sind nach 1-wöchiger Bearbeitungszeit bis 12:10, also

**vor Beginn**

der Dienstagsvorlesung zurückzugeben oder in den **großen** Briefkasten vor dem Büro 312 (Robert-Mayer-Straße 11-15) einzuwerfen.



- Übungen finden wöchentlich statt:
  - ▶ Übungszettel werden spätestens am Dienstag ins Netz gestellt,
  - ▶ Die Lösungen,
    - ★ zusammengetackert und mit Namen und Matrikelnummer, Gruppennummer und Tutor sowie dem Titel der Veranstaltung (Dismod) versehen, sind nach 1-wöchiger Bearbeitungszeit bis 12:10, also

## vor Beginn

der Dienstagsvorlesung zurückzugeben oder in den **großen** Briefkasten vor dem Büro 312 (Robert-Mayer-Straße 11-15) einzuwerfen.

- Übungsgruppen treffen sich **zum ersten Mal** in der nächsten Woche. Das erste Übungsblatt wie auch ein Präsenzblatt erscheint diese Woche. (Das Präsenzblatt wird in der nächsten Woche in den Übungsgruppen interaktiv gelöst.)

- Übungen finden wöchentlich statt:
  - ▶ Übungszettel werden spätestens am Dienstag ins Netz gestellt,
  - ▶ Die Lösungen,
    - ★ zusammengetackert und mit Namen und Matrikelnummer, Gruppennummer und Tutor sowie dem Titel der Veranstaltung (Dismod) versehen, sind nach 1-wöchiger Bearbeitungszeit bis 12:10, also

## vor Beginn

der Dienstagsvorlesung zurückzugeben oder in den **großen** Briefkasten vor dem Büro 312 (Robert-Mayer-Straße 11-15) einzuwerfen.

- Übungsgruppen treffen sich **zum ersten Mal** in der nächsten Woche. Das erste Übungsblatt wie auch ein Präsenzblatt erscheint diese Woche. (Das Präsenzblatt wird in der nächsten Woche in den Übungsgruppen interaktiv gelöst.)
- Übungsaufgaben und ihre Lösungen können mit Anderen besprochen werden, **aber** Lösungen **müssen eigenständig** aufgeschrieben werden!
  - ▶ Ein erstmaliger Verstoß führt zur Nicht-Anrechnung aller Punkte des Blatts.
  - ▶ Bei einem zweiten Verstoß werden alle Übungspunkte gestrichen und es erfolgt ein Vermerk in die Prüfungsakte.

Es wird **nicht** unterschieden zwischen Plagiat und Original.

BITTE, BITTE, BITTE .....

**UNBEDINGT**  
am Übungsbetrieb teilnehmen  
und Aufgaben bearbeiten!

Sie müssen sich bis

Donnerstag, dem 18. Oktober (um 23:55)

zum Übungsbetrieb anmelden!

Helfen Sie mir durch

Ihre **Fragen**, **Kommentare** und **Antworten!**

- Für die **Fragestunde** am Donnerstag (8:45 - 9:30): Überlegen Sie sich bitte Fragen zum Vorlesungsstoff bzw. zum aktuellen Übungsblatt.
  - Fragen sind aber auch in den sonstigen Vorlesungsstunden hochwillkommen!
- 
- \* Meine Sprechstunde: Dienstags 14-16.
  - \* Oder versuchen Sie es einfach aufs „Geratewohl“ (Raum 302 oder Raum 303 oder 313 in der Robert-Mayer-Straße 11-15).

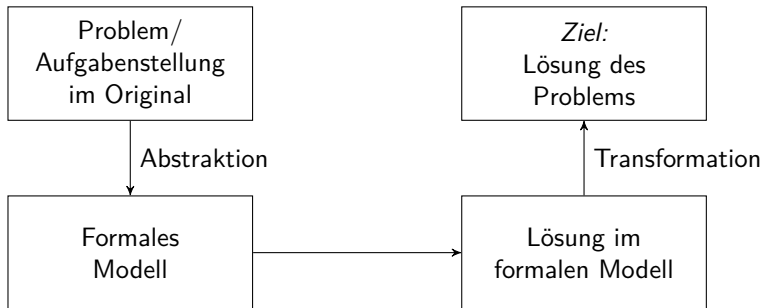
Im **Ingo-Wegener-Lernzentrum** (3. Stock in der Robert-Mayer-Straße 10) treffen Sie Ihre KommilitonInnen.

- Frau Düffel und ihre Mitarbeiter stehen für fachliche Fragen zur Verfügung.
- Die Seite <http://www.informatik.uni-frankfurt.de/index.php/de/studierende-informationen-fur-erstsemester.html> enthält Informationen nur für Erstsemester.

# Diskrete Modellierung: Ziele, Begriffsklärung und Anwendungen

# Worum geht's? Hol die Problemstellung in den Rechner!

- In den verschiedenen Gebieten der Informatik werden jeweils an die Art der Probleme und Aufgaben angepasste, diskrete Modelle verwendet.
- Ziel ist eine **präzise Beschreibung** der für die Lösung des Problems **relevanten Aspekte**.





In der Veranstaltung „Diskrete Modellierung“ führen wir fundamentale Kalküle ein, die den verschiedenen Modellen zugrunde liegen.

Welche Fragen möchten wir beantworten?

- ? Wie geht man mit diesen Kalkülen um und
- ? was sind die jeweiligen Stärken und Schwächen?

Mit welchen Kalkülen werden wir uns beschäftigen?

- Wir betrachten die folgenden fundamentalen Kalküle (mit einigen Anwendungen in Klammern):
  - ▶ **Aussagenlogik**
    - ★ (Wissensrepräsentation, automatisches Beweisen)
  - ▶ **Bäume und Graphen**
    - ★ (Gewinnstrategien in Spielen, Navis und Fahrpläne)
  - ▶ **Markov-Ketten**
    - ★ (Suchmaschinen, numerische Berechnung mehrdimensionaler Integrale, Proteinstruktur-Vorhersage)
  - ▶ **Transitionssysteme und endliche Automaten**
    - ★ (Entwurf von Schaltungen)
  - ▶ **kontextfreie Grammatiken**
    - ★ (Compilerbau)
  - ▶ **Prädikatenlogik**
    - ★ (Wissensrepräsentation, Datenbankanfragesprachen)

- Wir betrachten die folgenden fundamentalen Kalküle (mit einigen Anwendungen in Klammern):
  - ▶ **Aussagenlogik**
    - ★ (Wissensrepräsentation, automatisches Beweisen)
  - ▶ **Bäume und Graphen**
    - ★ (Gewinnstrategien in Spielen, Navis und Fahrpläne)
  - ▶ **Markov-Ketten**
    - ★ (Suchmaschinen, numerische Berechnung mehrdimensionaler Integrale, Proteinstruktur-Vorhersage)
  - ▶ **Transitionssysteme und endliche Automaten**
    - ★ (Entwurf von Schaltungen)
  - ▶ **kontextfreie Grammatiken**
    - ★ (Compilerbau)
  - ▶ **Prädikatenlogik**
    - ★ (Wissensrepräsentation, Datenbankanfragesprachen)

- Wir müssen die

## **Ausdrucksstärke eines Kalküls**

verstehen, also die Klasse der Anwendungsbeispiele, und klären, ob wir

**effizient mit dem Kalkül umgehen können.**

In vielen Anwendungsbeispiele müssen **komplexe Strukturen** modelliert werden, wie zum Beispiel

- \* Geschäftsabläufe in Firmen (Wirtschaftsinformatik),
- \* Kundenaufträge in der Software-Entwicklung (Software Engineering),
- \* Grundriss, 3D-Modell und Kostenplan im Bau eines Hauses,
- \* vereinfachende Abbilder eines Originals, wie etwa ein Modellflugzeug. ...

Beachte: Modelle sind meist **nicht** originalgetreu,

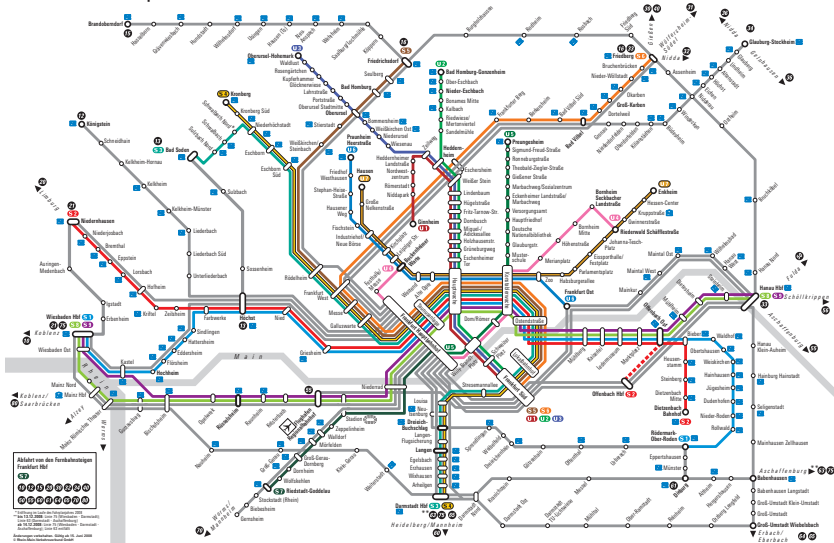
- sie heben bestimmte Eigenschaften hervor und lassen andere weg,
- Modelle müssen **vereinfachen**, um das komplexe Original besser zu verstehen!

# Selbst Netz- und Fahrpläne!



Rhein-Main-Verkehrsverbund

## Schnellbahnplan



Den Namen des Verkehrsmittelnehmers, mit dem Sie auf dieser Linie den Beförderungswertg schließen, entnehmen Sie bitte dem Aushangdisplay an der Haltestelle oder dem Fahrplänebuch.



## U4

### Frankfurt (Main) Schöfflestraße



**gültig vom 05.07.2008 bis 13.12.2008**

Die RMV-Fahrplanauskunft wird täglich aktualisiert. Sie erhalten somit den jeweils uns bekannten aktuellen Stand. Bei Änderungen auf der Strecke und Sonderverkehre können zu Abweichungen vom Regelfahrplan führen. Hierüber informieren wir Sie gerne auch in unseren kostenlosen Newsletter. Oder besuchen Sie uns einfach auf [www.rmv.de](http://www.rmv.de) (Verkehrsmittelweise | Bus & Bahn aktuell).

Montag - Freitag			Samstag			Sonntag*		
04	18 38 58		04	18 38 58		04	18 38 58	
05	18 28 <sup>A</sup> 38 48 <sup>A</sup> 58		05	18 38 58		05	18 38 58	
06	06 <sup>A</sup> 18 28 38 <sup>A</sup> 45 53 <sup>A</sup>		06	18 38 58		06	18 38 58	
07	00 06 <sup>A</sup> 13 <sup>A</sup> 15b 18 <sup>A</sup> 23 <sup>A</sup> 28 <sup>A</sup> 30 <sup>A</sup> 33 <sup>A</sup> 38 <sup>A</sup> 43 <sup>A</sup> 45 <sup>A</sup> 48 <sup>A</sup> 53 <sup>A</sup> 58 <sup>A</sup>		07	06 <sup>A</sup> 18 28 <sup>A</sup> 38 48 <sup>A</sup> 58		07	18 38 58	
08	00b 03 <sup>A</sup> 08 <sup>A</sup> 13 <sup>A</sup> 15c 18 <sup>A</sup> 23 <sup>A</sup> 28 <sup>A</sup> 30 <sup>A</sup> 33 <sup>A</sup> 38 <sup>A</sup> 43 <sup>A</sup> 45 <sup>A</sup> 48 <sup>A</sup> 53 <sup>A</sup> 58 <sup>A</sup>		08	06 <sup>A</sup> 18 28 <sup>A</sup> 38 48 <sup>A</sup> 58		08	06 <sup>A</sup> 18 28 <sup>A</sup> 38 48 <sup>A</sup> 58	
09	00b 03 <sup>A</sup> 08 <sup>A</sup> 13 <sup>A</sup> 15c 18 <sup>A</sup> 23 <sup>A</sup> 30 38 <sup>A</sup> 45 53 <sup>A</sup>		09	06 <sup>A</sup> 18 28 38 <sup>A</sup> 45 53 <sup>A</sup>		09	06 <sup>A</sup> 18 28 <sup>A</sup> 38 48 <sup>A</sup> 58	
10	00 08 <sup>A</sup> 15 23 <sup>A</sup> 30 38 <sup>A</sup> 45 53 <sup>A</sup>		10	00 08 <sup>A</sup> 15 23 <sup>A</sup> 30 38 <sup>A</sup> 45 53 <sup>A</sup>		10	08 <sup>A</sup> 18 28 <sup>A</sup> 38 48 <sup>A</sup> 58	
11	00 08 <sup>A</sup> 15 23 <sup>A</sup> 30 38 <sup>A</sup> 45 53 <sup>A</sup>		11	00 08 <sup>A</sup> 15 23 <sup>A</sup> 30 38 <sup>A</sup> 45 53 <sup>A</sup>		11	08 <sup>A</sup> 18 28 <sup>A</sup> 38 48 <sup>A</sup> 58	
12	00 08 <sup>A</sup> 15 23 <sup>A</sup> 30 38 <sup>A</sup> 45 53 <sup>A</sup>		12	00 08 <sup>A</sup> 15 23 <sup>A</sup> 30 38 <sup>A</sup> 45 53 <sup>A</sup>		12	08 <sup>A</sup> 18 28 <sup>A</sup> 38 48 <sup>A</sup> 58	
13	00 08 <sup>A</sup> 15 23 <sup>A</sup> 30 38 <sup>A</sup> 45 53 <sup>A</sup>		13	00 08 <sup>A</sup> 15 23 <sup>A</sup> 30 38 <sup>A</sup> 45 53 <sup>A</sup>		13	08 <sup>A</sup> 18 28 <sup>A</sup> 38 48 <sup>A</sup> 58	
14	00 08 <sup>A</sup> 15 23 <sup>A</sup> 30 38 <sup>A</sup> 45 53 <sup>A</sup>		14	00 08 <sup>A</sup> 15 23 <sup>A</sup> 30 38 <sup>A</sup> 45 53 <sup>A</sup>		14	08 <sup>A</sup> 18 28 <sup>A</sup> 38 48 <sup>A</sup> 58	
15	00 08 <sup>A</sup> 15 23 <sup>A</sup> 30 38 <sup>A</sup> 45 53 <sup>A</sup> 58 <sup>A</sup>		15	00 08 <sup>A</sup> 15 23 <sup>A</sup> 30 38 <sup>A</sup> 45 53 <sup>A</sup>		15	08 <sup>A</sup> 18 28 <sup>A</sup> 38 48 <sup>A</sup> 58	
16	00b 03 <sup>A</sup> 08 <sup>A</sup> 13 <sup>A</sup> 15c 18 <sup>A</sup> 23 <sup>A</sup> 28 <sup>A</sup> 30 <sup>A</sup> 33 <sup>A</sup> 38 <sup>A</sup> 43 <sup>A</sup> 45 <sup>A</sup> 48 <sup>A</sup> 53 <sup>A</sup> 58 <sup>A</sup>		16	00 08 <sup>A</sup> 15 23 <sup>A</sup> 30 38 <sup>A</sup> 45 53 <sup>A</sup>		16	08 <sup>A</sup> 18 28 <sup>A</sup> 38 48 <sup>A</sup> 58	
17	00b 03 <sup>A</sup> 08 <sup>A</sup> 13 <sup>A</sup> 15c 18 <sup>A</sup> 23 <sup>A</sup> 28 <sup>A</sup> 30 <sup>A</sup> 33 <sup>A</sup> 38 <sup>A</sup> 43 <sup>A</sup> 45 <sup>A</sup> 48 <sup>A</sup> 53 <sup>A</sup> 58 <sup>A</sup>		17	00 08 <sup>A</sup> 15 23 <sup>A</sup> 30 38 48 <sup>A</sup> 58		17	08 <sup>A</sup> 18 28 <sup>A</sup> 38 48 <sup>A</sup> 58	
18	00b 03 <sup>A</sup> 08 <sup>A</sup> 13 <sup>A</sup> 15c 18 <sup>A</sup> 23 <sup>A</sup> 28 <sup>A</sup> 30 <sup>A</sup> 33 <sup>A</sup> 38 <sup>A</sup> 43 <sup>A</sup> 45 <sup>A</sup> 48 <sup>A</sup> 53 <sup>A</sup> 58 <sup>A</sup>		18	06 <sup>A</sup> 18 28 <sup>A</sup> 38 48 <sup>A</sup> 58		18	08 <sup>A</sup> 18 28 <sup>A</sup> 38 48 <sup>A</sup> 58	

RMV 08/07/08, alle Angaben ohne Gewähr. © Rhein-Main-Verkehrsverbund

# Warum reden wir beim Netz- und Fahrplan von Modellen?

- Im Netzplan der Frankfurter S- und U-Bahn wird beschrieben,
  - ▶ welche Haltestellen von welchen Linien angefahren werden und welche Umsteigemöglichkeiten es gibt.
  - ▶ Vernachlässigt werden genauere topografische Informationen wie Entfernung, genaue Lage oder Verlauf der Bahnstrecken.
- Ähnliches gilt für den Fahrplan der U4.

Warum sprechen wir Mathematik?



Ganz, ganz wichtig ist die

**Fähigkeit einer präzisen Ausdrucksweise und sicheren Argumentation**

bei der Analyse von Problemen.

- Dazu gehört auch das Verständnis und der souveräne Umgang mit mathematische Grundlagen und Beweistechniken.
- Aber wir treiben doch Informatik und keine Mathematik?

Ganz, ganz wichtig ist die

**Fähigkeit einer präzisen Ausdrucksweise und sicheren Argumentation**

bei der Analyse von Problemen.

- Dazu gehört auch das Verständnis und der souveräne Umgang mit mathematische Grundlagen und Beweistechniken.
- Aber wir treiben doch Informatik und keine Mathematik?

Aber gerade weil wir Informatik treiben, müssen wir **sicherstellen**, d.h.

**beweisen**,

dass unsere Systeme **funktionieren**!

Das ist aber paradox!

# Wahr oder falsch?

- Pinocchios Nase wächst bekanntlich genau dann, wenn er lügt.  
*Pinocchio sagt, dass seine Nase wächst.*

Lügt Pinocchio?

# Wahr oder falsch?

- Pinocchios Nase wächst bekanntlich genau dann, wenn er lügt.

*Pinocchio sagt, dass seine Nase wächst.*

Lügt Pinocchio?

- Wir betrachten den Satz

*Dieser Satz ist unwahr!*

Ist dieser Satz wahr?

# Wahr oder falsch?

- Pinocchio's Nase wächst bekanntlich genau dann, wenn er lügt.

*Pinocchio sagt, dass seine Nase wächst.*

Lügt Pinocchio?

- Wir betrachten den Satz

*Dieser Satz ist unwahr!*

Ist dieser Satz wahr?

Sich selbst referenzierende Aussagen können wahr, falsch oder

# Wahr oder falsch?

- Pinocchios Nase wächst bekanntlich genau dann, wenn er lügt.

*Pinocchio sagt, dass seine Nase wächst.*

Lügt Pinocchio?

- Wir betrachten den Satz

*Dieser Satz ist unwahr!*

Ist dieser Satz wahr?

Sich selbst referenzierende Aussagen können wahr, falsch oder widersprüchlich sein

# Das Berry-Paradox<sup>1</sup>

Jede natürliche Zahl ist mit höchstens dreizehn Worten des Dudens definierbar!

Warum reichen 13 Worte für die Beschreibung jeder natürlichen Zahl  $n$ ?

- Beweis durch Widerspruch: Sei  $n$  die kleinste natürliche Zahl, die nicht mit höchstens dreizehn Worten definierbar ist.

---

<sup>1</sup>George Godfrey Berry (1867-1928) war Bibliothekar der Bodleian Library Oxfords



# Das Berry-Paradox<sup>1</sup>

Jede natürliche Zahl ist mit höchstens dreizehn Worten des Dudens definierbar!

Warum reichen 13 Worte für die Beschreibung jeder natürlichen Zahl  $n$ ?

- Beweis durch Widerspruch: Sei  $n$  die kleinste natürliche Zahl, die nicht mit höchstens dreizehn Worten definierbar ist.
- Aber dann ist  $n$  definierbar durch die dreizehn Worte „*ist die kleinste natürliche Zahl, die nicht mit höchstens dreizehn Worten definierbar ist*“.

---

<sup>1</sup>George Godfrey Berry (1867-1928) war Bibliothekar der Bodleian Library Oxfords

# Das Berry-Paradox<sup>1</sup>

Jede natürliche Zahl ist mit höchstens dreizehn Worten des Dudens definierbar!

Warum reichen 13 Worte für die Beschreibung jeder natürlichen Zahl  $n$ ?

- Beweis durch Widerspruch: Sei  $n$  die kleinste natürliche Zahl, die nicht mit höchstens dreizehn Worten definierbar ist.
- Aber dann ist  $n$  definierbar durch die dreizehn Worte „*ist die kleinste natürliche Zahl, die nicht mit höchstens dreizehn Worten definierbar ist*“.
- Die Annahme, dass 13 Worte nicht reichen, führt zu einem Widerspruch und das war zu zeigen.

Was ist passiert?

---

<sup>1</sup>George Godfrey Berry (1867-1928) war Bibliothekar der Bodleian Library Oxfords

# Das Berry-Paradox<sup>1</sup>

Jede natürliche Zahl ist mit höchstens dreizehn Worten des Dudens definierbar!

Warum reichen 13 Worte für die Beschreibung jeder natürlichen Zahl  $n$ ?

- Beweis durch Widerspruch: Sei  $n$  die kleinste natürliche Zahl, die nicht mit höchstens dreizehn Worten definierbar ist.
- Aber dann ist  $n$  definierbar durch die dreizehn Worte „*ist die kleinste natürliche Zahl, die nicht mit höchstens dreizehn Worten definierbar ist*“.
- Die Annahme, dass 13 Worte nicht reichen, führt zu einem Widerspruch und das war zu zeigen.

Was ist passiert?

*Unfug mit der Umgangssprache: Was bedeutet es definierbar zu sein?*

---

<sup>1</sup>George Godfrey Berry (1867-1928) war Bibliothekar der Bodleian Library Oxfords