Diskrete Modellierung

Wintersemester 2018/19

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 9

Ausgabe: 11.12.18
Abgabe: 18.12.18

Zur Erinnerung: Sei $\textsc{Web} = (V, E)$ ein Webgraph mit $V = \{1, \ldots, n\}$.
Ein Tupel $\mathrm{PR} = (\mathrm{PR}_1, \ldots, \mathrm{PR}_n) \in \mathbb{R}^n$ hat die Page-Rank-Eigenschaft bezüglich d, wenn für alle $j \in V$ gilt:

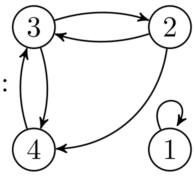
$$\mathrm{PR}_j = \frac{1-d}{n} + d \cdot \sum_{i \in \mathrm{Vor}_{\textsc{Web}}(j)} \frac{\mathrm{PR}_i}{a_i}.$$

Aufgabe 9.1 *Page-Rank I* $(8 + 8 + 9 = 25$ Punkte)

a) Betrachten Sie den rechts dargestellten Webgraphen $\textsc{Web}$. Geben Sie die Übergangsmatrix $P_d(\textsc{Web})$ für den Dämpfungsfaktor $d = \frac{3}{4}$ an.

b) Zeigen Sie, dass das Tupel $\mathrm{PR} := \left(\frac{11}{44}, \frac{8}{44}, \frac{14}{44}, \frac{11}{44}\right)$ die Page-Rank-Eigenschaft (bzgl. $d = \frac{3}{4}$) besitzt.

$\textsc{Web}$:



c) Wie ändern sich die Page-Ranks PR_i der Seiten $i = 1, 2, 3, 4$, wenn in $\textsc{Web}$ der Link von Webseite 2 auf Webseite 4 gelöscht wird? Welche steigen, welche sinken, welche bleiben gleich?

Eine kurze, begründete Antwort genügt. Eine Rechnung ist nicht erforderlich.

Aufgabe 9.2 *Page-Rank II* $(6 + 6 + 13 = 25$ Punkte)

Gegeben sei die Übergangsmatrix $P := P_d(\textsc{Web}')$ einer Webkette $\mathcal{W} = (G, P)$ mit dem Dämpfungsfaktor $d = \frac{1}{2}$ auf dem Webgraphen $\textsc{Web}'$, wobei

$$P = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie den zugrundeliegenden **Webgraphen** $\textsc{Web}'$ an. (Ohne Begründung)

b) Ein Zufallssurfer starte in Knoten 1, d.h. für die Anfangsverteilung gelte $\pi^{(0)} = (1, 0, 0)$. Berechnen Sie, wo sich der Surfer mit welcher Wahrscheinlichkeit nach einem Schritt und nach zwei Schritten aufhält, d. h. berechnen Sie $\pi^{(1)}$ und $\pi^{(2)}$.

c) Bestimmen Sie ein Tupel PR mit der Page-Rank-Eigenschaft bzgl. $d = \frac{1}{2}$ für $\textsc{Web}'$.

Bitte wenden!

Aufgabe 9.3 *Car-Sharing* (8 + 12 + 5 = 25 Punkte)

Carlas Car-Sharing-Service (C^2S^2) besitzt die drei Standorte Bockenheim (B), Hauptbahnhof (H) und Riedberg (R). An diesen drei Verleih-Stationen können Fahrzeuge ausgeliehen und wieder abgegeben werden. Die Auswertung der Kundendaten ergab die folgende Statistik:

- Zwei von drei Kunden, die in Bockenheim ein Fahrzeug ausleihen, geben es in Bockenheim oder am Hauptbahnhof wieder ab, und zwar fünfmal so häufig in Bockenheim wie am Hauptbahnhof.
- Leiht ein Kunde ein Fahrzeug am Hauptbahnhof aus, so gibt er es in 19 von 36 Fällen dort wieder ab, aber nur in einem von 12 Fällen am Riedberg.
- 75% aller am Riedberg ausgeliehenen Fahrzeuge werden wieder am Riedberg abgegeben, aber nur ein Sechstel der am Riedberg ausgeliehenen Wagen werden in Bockenheim abgegeben.

Da alle Autos zwischen 22 Uhr abends und 6 Uhr morgens auf einem Parkplatz an den drei Standorten stehen müssen, überlegt Carla, wie groß diese Parkplätze auf lange Sicht sein sollten.

a) Modellieren Sie Carlas Statistik als Markov-Kette $\mathcal{M} = (G, P)$, indem Sie eine Irrfahrt eines Fahrzeugs zwischen den Zuständen $B := 1$, $H := 2$ und $R := 3$ annehmen.
Geben Sie den Graphen G in grafischer Darstellung an und beschriften Sie jede Kante mit der entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeit. Geben Sie auch die Übergangsmatrix P an.

b) Angenommen, zu Beginn der Irrfahrt befindet sich ein Fahrzeug am Riedberg, d. h. die Anfangsverteilung sei $\pi^{(0)} = \left(\pi_B^{(0)}, \pi_H^{(0)}, \pi_R^{(0)}\right) = (0, 0, 1)$.

Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt

$$\pi^{(t)} = \left(\tfrac{1}{3}(1 - 2^{-t})\ ,\ \tfrac{1}{6}(1 - 2^{-t})\ ,\ \tfrac{1}{2}(1 + 2^{-t})\right).$$

Anmerkung: Es genügt, wenn Sie den Induktionsschritt nur für eine der drei Komponenten ausführen.

c) Angenommen, Carlas Car-Sharing-Service verfügt über zwölf Fahrzeuge und ist schon seit vielen, vielen Jahren im Geschäft. Wie viele Fahrzeuge parken erwartungsgemäß am Abend auf jedem der drei Parkplätze Bockenheim, Hauptbahnhof und Riedberg?

Aufgabe 9.4 *Volles Risiko oder auf Nummer sicher?* (9+9+7+10* = 25 + 10* Punkte)

James hat sein gesamtes Vermögen bis auf 3 Dollar im Casino verspielt. Um seine Verluste besser zu verkraften, möchte sich James einen Martini gönnen. Dieser kostet jedoch 8 Dollar.
Am Roulette-Tisch kann James Geld auf „gerade“ oder „ungerade“ setzen und den gesetzten Betrag verdoppeln oder verlieren. James’ Gewinnwahrscheinlichkeit für eine Partie sei p mit $0 < p < 1$.
Um sich das Geld für den Martini zu erspielen, erwägt James die folgenden Strategien:

- Bei der *vorsichtigen* Strategie setzt er stets einen Dollar und verlässt den Tisch, sobald er 8 Dollar hat oder pleite ist.
- Bei der *aggressiven* Strategie setzt er stets soviel wie möglich, *aber nicht mehr als nötig*, um den Tisch mit 8 Dollar zu verlassen. Er verlässt den Tisch, sobald er 8 Dollar hat oder pleite ist.

a) Modellieren Sie die beiden Strategien jeweils als Markov-Kette.

b) Bestimmen Sie für beide Strategien die Wahrscheinlichkeit w_{Martini}, dass James sich einen Martini gönnen kann, in Abhängigkeit von p.

Hinweis: Für die vorsichtige Strategie können Sie die Ergebnisse zum Gambler's-Ruin-Problem aus der Vorlesung (Beispiel 6.11 im Skript) verwenden. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $p = 1/2$ und $p \neq 1/2$.

c) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen der Wahrscheinlichkeiten w_{Martini} für beide Strategien in Abhängigkeit von p und diskutieren Sie das Ergebnis. Sie können den Graphen plotten lassen, z. B. mit diesem Online-Tool: https://rechneronline.de/funktionsgraphen/

d) **Bonusaufgabe:** In der Happy Hour kostet der Martini nur 7 Dollar. Modellieren Sie die aggressive Strategie (für allgemeines p) für diese neue Situation und berechnen Sie w_{Martini} in geschlossener Form in Abhängigkeit von p.