

Übungsblatt 13

Ausgabe: 29.01.19
 Abgabe: 05.02.19

Definition 1: Für ein Alphabet Σ , einen Buchstaben $\sigma \in \Sigma$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$ bezeichnet $|w|_\sigma$ die Anzahl der Vorkommen des Buchstabens σ im Wort w . (Zum Beispiel ist $|aaba|_a = 3$, $|aaba|_b = 1$ und $|aaba|_c = 0$.)

Aufgabe 13.1 Grenzen der Regularität (12 + 12 = 24 Punkte)

Zeigen Sie mit dem Satz von Myhill-Nerode II, dass die Sprachen L_1 und L_2 nicht regulär sind.

- a) $L_1 := \{a^m b^n c^m : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$
- b) $L_2 := \{0^k 1^\ell : k, \ell \in \mathbb{N}, k \geq \ell\}$

Hinweis: Finden Sie jeweils eine unendliche Menge von Worten $\{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots\}$, die paarweise inäquivalent bzgl. der Nerode-Relation sind, und weisen Sie die Inäquivalenzen $u_i \not\equiv_L u_j$ (für $L \in \{L_1, L_2\}$) durch Angabe geeigneter Zeugen nach.

Aufgabe 13.2 NFAs und Potenzmengenkonstruktion ((4+8+6) + 8 = 26 Punkte)

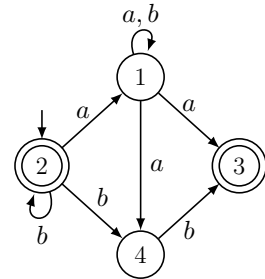
a) Sei N der rechts abgebildete NFA über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$.

i) Welche der folgenden Worte liegen in $L(N)$, welche nicht?

$w_1 := baa$ $w_2 := bab$ $w_3 := aabb$ $w_4 := baba$

ii) Konstruieren Sie mittels Potenzmengenkonstruktion einen DFA D , der dieselbe Sprache wie N akzeptiert. Berücksichtigen Sie in D nur Zustände, die vom Startzustand von D aus erreichbar sind.

iii) Geben Sie einen regulären Ausdruck für $L(N)$ an.



b) Konstruieren Sie einen NFA für die Sprache des regulären Ausdrucks $(aa|b)((a|bb)^*|ab)$.

Aufgabe 13.3 Reguläre Ausdrücke (10 + 15 + 5* = 25 Punkte + 5* Extrapunkte)

a) Gegeben seien die regulären Ausdrücke $R_1 := (a|b|\varepsilon)(a|b)^*b(aa|bb)$ und $R_2 := ((aa)^*|b(bb)^*)^*$.

i) Welche der folgenden Worte w_i liegen in $L(R_1)$ bzw. $L(R_2)$, welche nicht?

$w_1 := aab$ $w_2 := baabb$

ii) Beschreiben Sie die Sprachen $L(R_1)$ und $L(R_2)$ umgangssprachlich.

b) Geben Sie für die folgenden Sprachen je einen (möglichst kurzen) regulären Ausdruck an, der die Sprache beschreibt.

i) $L_1 := \{w \in \{a, b\}^* : w \text{ besteht nur aus } a\text{'s oder nur aus } b\text{'s, und } |w| \geq 2\}$

ii) $L_2 := \{w \in \{0, 1\}^* : |w|_1 \text{ ist gerade}\}$

iii) $L_3 := \{w \in \{a, b\}^* : w \text{ enthält nicht das Teilwort } ab\}$

iv)* **Bonusaufgabe** $L_4 := \{w \in \{a, b\}^* : w \text{ enthält nicht das Teilwort } aba\}$

Sie müssen Ihre Antworten in a) und b) nicht begründen.

Aufgabe 13.4 Kontextfreie Grammatiken

(8 + 8 + 9 = 25 Punkte)

Hinweis: Möglicherweise wurden kontextfreie Grammatiken in der Vorlesung noch nicht in ausreichendem Umfang behandelt. In diesem Fall lesen Sie bitte in den Abschnitten 8.1 und 8.2 des Skriptes nach.

- a) Sei $G_1 := (\Sigma, V, S, P)$ die kontextfreie Grammatik mit $\Sigma := \{a, b, c\}$, $V := \{S, T\}$ und

$$P := \{S \rightarrow cSa \mid T, \\ T \rightarrow cTb \mid \varepsilon\}.$$

Beschreiben Sie die Sprache $L(G_1)$ umgangssprachlich oder mathematisch.

- b) Gegeben sei die Sprache

$$L := \{a^m b^n : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, m < n\}.$$

Konstruieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G_2 := (\Sigma, V, S, P)$ mit $L(G_2) = L$.

- c) Kritischen Stimmen zufolge lässt sich die Handlung der neuen Starwars-Filme als mehr oder weniger kontextfrei beschreiben. Die Fans sind sich einig, dass ein Starwars-Film aus höchstens drei Typen von Szenen besteht:

- d Laserschwert-Duelle
- r Schlachten oder Verfolgungsjagden mit Raumschiffen
- j altkluge Jedi-Weisheiten, von einem Jedi-Meister vorgetragen

Jede solche Szene kann auch wiederholt in einem Film vorkommen. Ein Starwars-Film kann somit als Wort $s \in \Sigma^*$ mit $\Sigma := \{d, r, j\}$ modelliert werden. Intensive algorithmengestützte Marktforschung ergab, dass ein Film $s \in \Sigma^*$ genau dann *erfolgreich* wird, wenn er nach folgenden Regeln aufgebaut ist:

- Ein Film besteht aus altklugen Jedi-Weisheiten, einer anschließenden Verfolgungsjagd mit Raumschiffen und einem abschließenden Laserschwert-Duell.

Außerdem sind folgende Ersetzungen erlaubt:

- Ein Laserschwert-Duell darf stets ersetzt werden durch zwei Laserschwert-Duelle.
- Eine Raumschiffschlacht darf stets ersetzt werden durch
 - ein Laserschwert-Duell oder
 - eine Jedi-Weisheit gefolgt von einer Raumschiffschlacht und anschließendem Laserschwert-Duell.
- Eine Jedi-Weisheit darf
 - durch eine Verfolgungsjagd mit Raumschiffen ersetzt werden oder
 - ersatzlos gestrichen werden.

Sei $\text{STARWARS} \subseteq \Sigma^*$ die durch die obigen Regeln beschriebene Sprache aller möglichen erfolgreichen Starwars-Filme. Es gilt beispielsweise $\text{jrd}, \text{rdd}, \text{jjjrddd} \in \text{STARWARS}$.

Konstruieren Sie eine Grammatik $G_3 := (\Sigma, V, S, P)$, die genau die Sprache aller erfolgreichen Starwars-Filme beschreibt, d.h. es soll $L(G) = \text{STARWARS}$ gelten. Erläutern Sie auch Ihre Notation.

Bonusaufgabe 13.5. DFAs vs. NFAs

(10 + 10 = 20* Extrapunkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\Sigma = \{0, 1\}$. Betrachten Sie die Sprache $L_n := \{w_1 w_2 : w_1, w_2 \in \Sigma^n, w_1 \neq w_2\}$.

- a) Zeigen Sie: Jeder DFA für die Sprache L_n benötigt mindestens 2^n Zustände.

Hinweis: Zeigen Sie $\text{Index}(L_n) \geq 2^n$.

- b) Konstruieren Sie einen NFA mit möglichst wenigen Zuständen für L_n . Begründen Sie auch die Korrektheit Ihrer Konstruktion.