Markov-Ketten und Google's Page-Rank

Zielstellung

1. Wir geben einen kurzen Überblick über die Arbeitsweise von **Suchmaschinen** für das Internet.
   - Eine Suchmaschine erwartet als Eingabe
     ein Stichwort oder eine Liste von Stichworten
   - und gibt als Ausgabe eine Liste von Links auf möglichst informative Webseiten zu diesen Stichworten. Die Liste soll so sortiert sein, dass

     die informativsten Links am „weitesten oben“ stehen.

2. Gleichzeitig geben wir eine Einführung in

   Markov-Ketten,

   einem wichtigen Werkzeug in der Modellierung einfacher stochastischer Prozesse.

Das Internet

Die von Suchmaschinen zu bewältigenden Datenmengen sind immens!

In 2018 gab es

- ca. 1,8 Milliarden Websites (von denen ca. 200 Millionen regelmäßig aktualisiert werden) mit ca. 1 Milliarde neuer Websites seit 2016,
- ca. 4 Milliarden Internetnutzer weltweit
- und ca. 2 Billionen, also 10^{12} Suchanfragen pro Jahr auf Google allein.

Und dann müssen Suchanfragen auch noch in „Echtzeit“ beantwortet werden.

Die zentrale Aufgabe:

Bewerte den Informationsgehalt der Webseiten

in Bezug auf die jeweilige Kombination der Suchbegriffe!

Die Architekur von Suchmaschinen

Suchmaschinen: Die wichtigsten Komponenten

Anfragen für einen sich rasant ändernden Suchraum gigantischer Größe sind ohne merkliche Reaktionszeit zu beantworten.

(1) **Web-Crawler** durchforsten das Internet, um neue oder veränderte Webseiten zu identifizieren.

(2) Die von den Crawlern gefundenen Informationen werden in einer komplexen **Datenstruktur** gespeichert, um bei Eingabe von Suchbegriffen in „Echtzeit“ alle relevanten Webseiten ermitteln zu können.

(3) **Bewerte die Webseiten**

*hinsichtlich ihrer Relevanz für mögliche Suchbegriffe wie auch hinsichtlich ihrer **generellen** Bedeutung im Internet.*

Datenstrukturen für Suchmaschinen

Die Datenstruktur: Index und invertierter Index

1. Im **Index** werden alle vom Crawler gefundenen Webseiten *w* gespeichert:
   - URL (d.h. die Adresse) und Inhalt von *w*.
   - Der Inhalt von *w* wird analysiert: Alle vorkommenden Worte werden in Häufigkeit und Sichtbarkeit (Vorkommen in Überschriften, Schriftgöße etc.) erfasst.
   - Die auf *w* zeigenden Hyperlinks werden ebenfalls analysiert:
     - Welche Begriffe tauchen in der Beschriftung des Links auf?
     - Wie prominent ist der Link platziert?
2. Aus dem Index wird der **invertierte Index** erzeugt, der zu jedem möglichen Suchbegriff eine Liste aller Webseiten enthält, die den Suchbegriff enthalten.
   - Für jede in der Liste auftauchende Webseite *w* wird die Sichtbarkeit des Begriffs innerhalb von *w* und innerhalb der auf *w* zeigenden Seiten aufgeführt.
   - Mit diesen Zusatzinformationen und mit Hilfe ihrer

     „grundsätzlichen“ Bedeutung

     wird die Seite *w* in die Liste eingereiht.
     - Wie die Einreihung erfolgt, ist Betriebsgeheimnis der Suchmaschinenbetreiber.

Wie bestimmt man **die grundsätzliche Bedeutung einer Webseite**?

Der Page-Rank einer Webseite

Peer Review: Die grundsätzliche Bedeutung einer Webseite

Im Ansatz des „**Peer Review**“ wird die folgende Annahme gemacht:

Wenn eine Webseite i einen Link auf eine Webseite j enthält, dann

1. gibt es eine inhaltliche Beziehung zwischen beiden Webseiten, und
2. der Autor der Webseite i hält die Informationen auf Webseite j für wertvoll.

Der **Web-Graph**,

also die Link-Struktur des Internets

spielt im Peer-Review eine besondere Rolle. Zur Erinnerung:

- Die Webseiten sind Knoten und
- die Hyperlinks sind die gerichteten Kanten des Webgraphen.

Page-Rank: Notation

Um die „grundlegende Bedeutung“ einer Webseite zu messen, berücksichtigt der Page-Rank nur die Link-Struktur des Internets, nicht aber den Inhalt der Seite.

$\textsc{Web} = (V, E)$ bezeichne im Folgenden den Web-Graphen.

- Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Webseiten mit den Zahlen $1, \ldots, n$ durchnummeriert sind, und dass $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt.
- Für jeden Knoten $i \in V$ ist

$$a_i \ := \ \text{Aus-Grad}_{\textsc{Web}}(i)$$

  der Ausgangsgrad von i in $\textsc{Web}$, also die Anzahl der Hyperlinks, die von der Webseite i auf andere Webseiten verweisen.
- Für eine Webseite $j \in V$ schreiben wir $\text{Vor}_{\textsc{Web}}(j)$, um die Menge aller Webseiten zu bezeichnen, die einen Link auf j enthalten, d.h.

$$\text{Vor}_{\textsc{Web}}(j) \ = \ \{i \in V \ : \ (i, j) \in E\}.$$

  Die Elemente in $\text{Vor}_{\textsc{Web}}(j)$ heißen (direkte) Vorgänger von j.

Page-Rank mittels Peer Review

Wir messen die „grundlegende Bedeutung“ einer Webseite j durch die Zahl

$$\mathbf{PR_j},$$

den Page-Rank von j.

> *Der Wert PR_j soll das „Renommee“ der Webseite j widerspiegeln:*
> *PR_j soll umso größer sein, je höher das Renommee der Webseite j ist.*

Wann sollte PR_j groß sein?

> *Wenn genügend viele Webseiten mit großem Page-Rank auf j zeigen!*

Wir fordern, dass eine Webseite i ihren Page-Rank an alle Webseiten j, auf die i zeigt, zu gleichen Teilen „vererbt“.

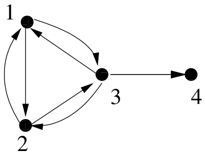
$$\mathbf{PR_j} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{Vor}_{\mathrm{WEB}}(\mathbf{j})} \frac{\mathbf{PR_i}}{\mathbf{a_i}}.$$

Wir erhalten ein **Gleichungssystem**: Eine Gleichung für jeden Knoten j.

Schauen wir mal, was passiert

Senken, also Knoten vom Ausgangsgrad 0, vererben ihren Page-Rank nicht. Ist das problematisch?

Betrachte den folgenden „Webgraphen“ $\textsc{Web} = (V, E)$:



Die einzigen Page-Rank Werte, die die Gleichungen

$$\mathrm{PR}_j \;=\; \sum_{i \in \mathrm{Vor}_{\textsc{Web}}(j)} \frac{\mathrm{PR}_i}{a_i}.$$

erfüllen, sind $\mathrm{PR}_1 = \mathrm{PR}_2 = \mathrm{PR}_3 = \mathrm{PR}_4 = 0$ und diese Werte sollen die

„grundlegende Bedeutung“

der 4 Seiten widerspiegeln?

Entferne Senken

Um Senken loszuwerden:

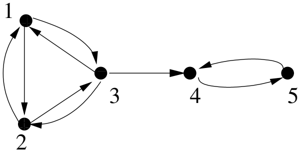
1. Füge von jeder Senke Kanten zu *allen* Knoten hinzu oder
2. lösche rekursiv(!) alle Senken, bis ein Graph ohne Senken übrig bleibt.

Welche Transformation auch immer durchgeführt wird: Der Web-Graph wird durch einen gerichteten Graphen $\textsc{Web} = (V, E)$ **ohne Senken** repräsentiert.

Haben wir das Problem gelöst?

Was passiert, wenn bestimmte Knoten nur unter sich verbunden sind, aber keine Kante zu einem anderen Knoten des Graphen $\mathrm{W\scriptstyle EB}$ besitzen?

Betrachte den folgenden Graphen $\mathrm{W\scriptstyle EB} = (V, E)$:



Man kann sich leicht davon überzeugen, dass Page-Rank Werte die Gleichung

$$\mathrm{PR}_j = \sum_{i \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{W\scriptscriptstyle EB}}(j)} \frac{\mathrm{PR}_i}{a_i}.$$

genau dann erfüllen, wenn $\mathrm{PR}_1 = \mathrm{PR}_2 = \mathrm{PR}_3 = 0$ und $\mathrm{PR}_4 = \mathrm{PR}_5$ gilt.

Ist das jetzt gut oder schlecht?

Gehört unser Ansatz „in die Tonne“
oder stimmt die Grundidee?

Woran liegt's?

(a) Der Ausweg?

- Füge Kanten von einer Webseite i zu **allen** anderen Webseiten ein, „**dämpfe**" aber den Beitrag der neuen Seiten mit dem Faktor $1 - d$ für $0 \leq d \leq 1$.
- Die alten Kanten, also die Hyperlinks, werden mit dem Faktor d gedämpft.

(b) Man stelle sich vor, dass Renommee im Gesamtumfang von 1 auf die Webseiten verteilt wird:

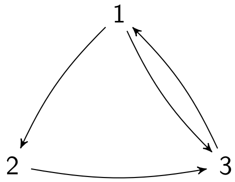
- Ein **Grundeinkommen** im Gesamtumfang von $\mathbf{1 - d}$ wird gleichmäßig auf die einzelnen Seiten verteilt,
- der **Verdienst** im Gesamtumfang von $\mathbf{d}$ wird mit Peer Review erworben.

(c) Ein Tupel $\mathrm{PR} = (\mathrm{PR}_1, \ldots, \mathrm{PR}_n) \in \mathbb{R}^n$ hat die **Page-Rank-Eigenschaft** bezüglich d, wenn für alle $j \in V$ gilt:

$$\mathrm{PR}_j \quad = \quad \underbrace{(1-d) \cdot \frac{1}{n}}_{\text{anteiliges Grundeinkommen}} \quad + \quad \underbrace{d \cdot \sum_{i \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{WEB}}(j)} \frac{\mathrm{PR}_i}{a_i}}_{\text{durch Peer Review erworbener Verdienst}} \quad .$$

Der neue Page-Rank: Ein Beispiel für $d = \frac{1}{2}$

Betrachte den folgenden Graphen $\textsc{Web} = (V, E)$:



Wir suchen ein Tupel $\mathrm{PR} = (\mathrm{PR}_1, \mathrm{PR}_2, \mathrm{PR}_3)$ von reellen Zahlen mit der Page-Rank-Eigenschaft bezüglich $d = 1/2$:

(1) $\quad \mathrm{PR}_1 = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{PR}_3}{1},$

(2) $\quad \mathrm{PR}_2 = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{PR}_1}{2}$

(3) $\quad \mathrm{PR}_3 = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\mathrm{PR}_1}{2} + \frac{\mathrm{PR}_2}{1}\right).$

Wir lösen das lineare Gleichungssystem und erhalten

$$\mathrm{PR}_1 = \frac{14}{39}, \quad \mathrm{PR}_2 = \frac{10}{39}, \quad \mathrm{PR}_3 = \frac{15}{39}.$$

Page-Rank: Die wichtigen Fragen

Wir müssen ein lineares Gleichungssystem lösen.

(a) Ist das Gleichungssystem überhaupt lösbar und wenn ja, ist die Lösung eindeutig?

(b) Und wie soll man, bitte schön,
ein Gleichungssystem mit mehreren Milliarden Zeilen und Spalten lösen?
   - Unsere Rechner sind mittlerweile so mächtig: kein Problem mit Gaußscher Eliminierung!
   - **Denkste!** Ein Gleichungssystem dieser Dimension können wir auch mit allen Rechnern dieser Welt nicht knacken, wenn ...
     ...wir eine Gaußsche Eliminierung ausführen müssen.

(c) Und selbst wenn es genau eine Lösung PR gibt und wir diese Lösung irgendwie bestimmen können:

Gibt PR_i das Renommee der Webseite i wieder?

Wir betrachten gleich einen rivalisieren Ansatz mit dem Page-Rank aus

Perspektive des Zufallssurfers.

Der Zufallssurfer

Verteilungen

Ein Tupel $\pi \in \mathbb{R}^n$ heißt eine **Verteilung** (auf $\{1, \ldots, n\}$), falls π die beiden folgenden Eigenschaften hat:

- $\pi_i \geqslant 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und
- $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$ gilt.

Wir benutzen Verteilungen, um **Irrfahrten** (engl: Random Walks) im Webgraphen $\textsc{Web} = (V, E)$ zu beschreiben:

Dazu legen wir für jeden Knoten $i \in V$ eine Verteilung

$$(p_{i,1}, \ldots, p_{i,n})$$

fest, so dass – zu jedem Zeitpunkt der Irrfahrt – $p_{i,j}$ die Wahrscheinlichkeit ist, in einem Schritt von Knoten i zum Knoten j zu springen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit $\mathbf{p_{i,j}}$ soll unser Surfer

vom Knoten i auf den Knoten j

springen?

Wenn der Zufallssurfer auf einer Webseite i ist, so wählt er

- die **Option „wildes Hüpfen“** mit Wahrscheinlichkeit $(1-d)$.
  - Darauffolgend wähle eine der n Webseiten mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ aus.
- die **Option „Webgraph“** mit Wahrscheinlichkeit d.
  - Darauffolgend wähle einen der $a_i = \text{Aus-Grad}_{\text{WEB}}(i)$ ausgehenden Links mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{a_i}$ aus.

Setze

$$\mathbf{p_{i,j}} := \begin{cases} \frac{1-d}{n} + d \cdot \frac{1}{a_i} & \text{falls } (i,j) \text{ eine Kante von WEB ist,} \\ \frac{1-d}{n} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(d ist der Dämpfungsfaktor und $a_i = \text{Aus-Grad}_{\text{WEB}}(i)$.)

Die Übergangsmatrix

Die Übergangsmatrix $P_d(\textsc{Web})$

wird definiert durch

$$P_d(\textsc{Web}) := \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}$$

wobei

$$\mathbf{p_{i,j}} = \begin{cases} \frac{1-d}{n} + d \cdot \frac{1}{a_i} & \text{falls } (i,j) \text{ eine Kante von } \textsc{Web} \text{ ist,} \\ \frac{1-d}{n} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist die $i$te Zeile

$$(p_{i,1}, \ldots, p_{i,n})$$

tatsächlich eine Verteilung, denn

$$\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1-d}{n} + \sum_{j:(i,j)\in E} \frac{d}{a_i} = n \cdot \frac{1-d}{n} + a_i \cdot \frac{d}{a_i} = 1 - d + d = 1.$$

Stochastische Matrizen

Eine $n \times n$ Matrix

$$P = \begin{pmatrix} P_{1,1} & \cdots & P_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{n,1} & \cdots & P_{n,n} \end{pmatrix}$$

heißt **stochastisch**, wenn

(1) $P_{i,j} \geqslant 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und

(2) für jede Zeile $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: $\sum_{j=1}^{n} P_{i,j} = 1$.

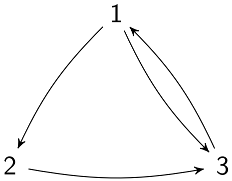
Die Matrix P ist also genau dann stochastisch, wenn jede Zeile eine Verteilung ist

$$\Longrightarrow$$

Die Matrix $P_d(\text{WEB})$ der Übergangswahrscheinlichkeiten ist stochastisch.

Die Übergangsmatrix

Für den Wert $d = \frac{1}{2}$ und den Graphen $\textsc{Web}$



ist beispielsweise $P_{1/2}(\textsc{Web})_{1,1} = \frac{1}{6}$,
$P_{1/2}(\textsc{Web})_{1,2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12} = P_{1/2}(\textsc{Web})_{1,3}$ und $P_{1/2}(\textsc{Web})_{2,3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$.
Die vollständige Übergangsmatrix ist

$$P_{1/2}(\textsc{Web}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

„Peer Review“ versus „Zufallssurfer“

1. Der Peer-Review Ansatz: Ein Tupel $\mathrm{PR} = (\mathrm{PR}_1, \ldots, \mathrm{PR}_n) \in \mathbb{R}^n$ hat die **Page-Rank-Eigenschaft** bezüglich d, wenn für alle $j \in V$ gilt:

$$\mathrm{PR}_j \quad = \quad \frac{1-d}{n} \quad + \; d \cdot \sum_{i \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{WEB}}(j)} \frac{\mathrm{PR}_i}{a_i}.$$

2. Der **Zufallssurfer** führt eine zufällige **Irrfahrt** durch: Er springt mit Wahrscheinlichkeit $p_{i,j}$ von der Webseite i zur Webseite j, wobei

$$\mathbf{p_{i,j}} = \begin{cases} \frac{1-d}{n} + d \cdot \frac{1}{a_i} & \text{falls } (i,j) \text{ eine Kante von } \mathrm{W{\scriptstyle EB}} \text{ ist,} \\ \frac{1-d}{n} & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Als Konkurrenz zum Page-Rank PR:

$$\mathrm{PR}_j^* \quad = \quad \text{die relative Häufigkeit mit der Seite } j \text{ in einer unendlich langen Irrfahrt besucht wird.}$$

3. $P_d(\mathrm{W{\scriptstyle EB}}) := \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}$ heißt Übergangsmatrix des Zufallssurfers.

Markov-Ketten,
das mathematische Modell für Irrfahrten

Markov-Ketten

Der Zufallssurfer springt zufällig im Webgraphen herum: Er führt eine Irrfahrt durch. Was müssen wir über Irrfahrten wissen?

Den Graphen und die Übergangsmatrix.

$G = (V, E)$ sei ein gerichteter Graph mit Knotenmenge $V = \{1, \ldots, n\}$. Die (homogene) **Markov-Kette** $\mathcal{M}$ wird beschrieben durch das Paar

$$\mathcal{M} := (G, P)$$

mit dem Graphen G und der Übergangsmatrix P.

(a) G hat keine Senke, d.h. $\text{Aus-Grad}_G(v) > 0$ gilt für alle Knoten v von G.

(b) Die Matrix P ist eine stochastische Matrix mit n Zeilen und n Spalten. Es ist $P_{i,j} = 0$ genau dann, wenn (i, j) keine Kante in G ist.

Die Knoten von G nennt man häufig auch **Zustände**.

Wie stellt man eine Markov-Kette grafisch dar?

Die von einer Markov-Kette erzeugte Irrfahrt

Sei $\mathcal{M} = (G, P)$ eine Markov-Kette mit dem Graphen $G = (V, E)$ und π eine auf V definierte Wahrscheinlichkeitsverteilung.

$\mathcal{M}$ **beginne** mit Wahrscheinlichkeit π_i im Zustand $i \in V$.

Welche Irrfahrt wird von $\mathcal{M}$ erzeugt?

1. X_k bezeichne den von $\mathcal{M}$ nach k Schritten erreichten Zustand.
   - Es gilt $X_0 = i$ mit Wahrscheinlichkeit π_i.
   - X_k ist eine Zufallsvariable.
2. Die Kette $\mathcal{M} = (G, P)$ erzeugt die unendlich lange Irrfahrt in G

$$X_0, X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots.$$

1. **Wichtige Eigenschaft**: Der zum Zeitpunkt $k > 0$ angenommene Zustand X_k hängt nur vom Vorgänger-Zustand X_{k-1} ab.
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gilt $X_1 = j$? D.h. mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich die Irrfahrt nach **einem** Schritt im Zustand j?

Ein Schritt einer Markov-Kette: Das Vektor-Matrix Produkt

Vektor-Matrix und Matrizenprodukt

(a) Um das **Vektor-Matrix Produkt**

$$y = x^T \cdot A$$

für eine $n \times m$ Matrix A reeller Zahlen und ein Tupel $x \in \mathbb{R}^n$ zu berechnen:

- interpretiere x als Zeilenvektor, den man dann nacheinander mit allen Spalten von A multiplizieren muss, also

$$y_i = \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \cdot a_{\ell,i}.$$

(b) Um das **Matrizenprodukt**

$$C = A \cdot B$$

für eine $n \times m$ Matrix A und eine $m \times r$ Matrix B zu berechnen:

- Multipliziere die $i$te Zeile von A mit der $j$ten Spalte von B (für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $j \in \{1, \ldots, r\}$), also

$$c_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{m} a_{i,\ell} \cdot b_{\ell,j}.$$

WOOOOOOW (1/2)

Wieso reden wir plötzlich über das Vektor-Matrix Produkt?

Sei (G, P) eine Markov-Kette. Wenn wir mit Wahrscheinlichkeit π_i im Knoten i starten, dann sind wir nach einem Schritt im Knoten j mit Wahrscheinlichkeit

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i \cdot P_{i,j} \overset{\text{toll!}}{=} (\pi \cdot P)_j.$$

(Wir interpretieren Verteilungen als Zeilenvektoren.) Die Kette,

wenn in Verteilung π gestartet,

befindet sich nach einem Schritt **in der Verteilung**

$$\pi \cdot P,$$

denn $(\pi \cdot P)_j$ ist die Wahrscheinlichkeit, den Zustand j in einem Schritt zu erreichen.

WOOOOOOW (2/2)

Und wenn wir die Markov-Kette **k** Schritte lang beobachten?

(a) **Rekursionsanfang** für $k = 0$: Die Kette befindet sich in der Verteilung

$$\pi^{(0)} := \pi.$$

(b) **Rekursionsschritt**: Wenn sich die Kette nach k Schritten in der Verteilung $\pi^{(k)}$ befindet, dann befindet sie sich nach $k+1$ Schritten in der Verteilung

$$\pi^{(k+1)} := \pi^{(k)} \cdot P.$$

Mit vollständiger Induktion nach k:

Nach k Schritten befindet sich die Kette in der Verteilung

$$\pi^{(k)} = \pi \cdot P^k,$$

wenn wir in der Verteilung π beginnen.

Was ist die „**Grenzverteilung**“? Existiert der Grenzwert $\lim_{k \to \infty} \pi \cdot P^k$?

Die Berechnung von Matrizenprodukten

Wie schnell – wenn überhaupt – konvergieren die Verteilungen

$$\pi^{(k)} = \pi \cdot P^k$$

Werkzeuge, die das Matrizenprodukt P^k und das Vektor-Matrixprodukt $\pi \cdot P^k$ schnell (und komfortabel) berechnen:

1. Für kleine Markov-Ketten ist das in

   `https://matrixcalc.org/de/`

   bereitgestellte Online-Werkzeug völlig ausreichend.
2. Für größere Ketten ist SymPy

   `http://docs.sympy.org/latest/tutorial/matrices.html`

   eine gute Wahl.

Zusammenfassung: Was ist bisher passiert?

(a) Wie definiert man das **Renommee einer Webseite** w?

- Mit PR_w, falls das Tupel PR die **Page-Rank-Eigenschaft** besitzt oder
- mit der relativen Häufigkeit PR^*_w mit der der **Zufallssurfer** die Seite w besucht?

(b) Der Zufallssurfer unternimmt eine **Irrfahrt** auf G. Mit einer Markov-Kette $\mathcal{M} = (G, P)$ können wir Irrfahrten im gerichteten Graphen G untersuchen.

- Wenn (i, j) eine Kante von G ist, dann läuft die Irrfahrt mit Wahrscheinlichkeit

$$P_{i,j}$$

in einem Schritt von Zustand i nach Zustand j

(c) Irrfahrten und das **Vektor-Matrix-Produkt**:

Wenn sich die Kette $\mathcal{M} = (G, P)$ anfänglich in der Verteilung π befindet,

- (d.h. Zustand i wird mit Wahrscheinlichkeit π_i besucht)

dann befindet sie sich nach k Schritten im Zustand $\pi \cdot P^k$.

- (d.h. Zustand i wird mit Wahrscheinlichkeit $(\pi \cdot P^k)_i$ besucht)

Markov-Ketten: Was möchte man gerne wissen?

Markov-Ketten: Alter und neuer Page-Rank

Der vollständige, gerichtete Graph $\vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{n}} = (\mathbf{V}, \mathbf{E}_{\mathbf{n}})$ besitzt Knotenmenge $V = \{1, \ldots, n\}$ und Kantenmenge $E_n = \{\, (u, v) \,:\, u, v \in \{1, \ldots, n\}\,\}$.

Sei $\textsc{Web}$ der Webgraph. Die **Webkette** $\mathcal{W}$ wird beschrieben durch das Paar

$$\mathcal{W} := (\vec{K}_n, P_d(\textsc{Web})).$$

Die Webkette muss uns helfen, den alten und neuen Page-Rank zu verstehen!

Was möchte man gerne wissen?

? Wie hängen PR und PR*, also alter und neuer Page-Rank zusammen?
- Existiert der alte Page-Rank überhaupt?
- Hängt der neue Page-Rank von der Startverteilung des Zufallssurfers ab?

? Lässt sich der alte, bzw. der neue Page-Rank effizient berechnen?

Markov-Ketten: Irrfahrten auf ungerichteten Graphen (1/2)

Viele Mähroboter, die ohne GPS-Ortung arbeiten, mähen den Rasen nach dem Zufallsprinzip.

- Der Roboter fährt gerade Strecken über den Rasen und wendet dann am Rand zufällig in einem von endlich vielen Winkeln.
- Wird tatsächlich jede Stelle des Rasens hochwahrscheinlich gemäht?

(a) Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$.
  - Sei d_v die Anzahl der Nachbarn von v.
  - Hat die Irrfahrt den Knoten v erreicht, dann wird die Irrfahrt mit Wahrscheinlichkeit $1/d_v$ mit einem Nachbarn v_i $(1 \leqslant i \leqslant d_v)$ von v fortgesetzt.

(b) Die Markov-Kette (G', P) dieser Irrfahrt besitzt den Graphen $G' = (V, E')$,
  - wobei G und G' dieselbe Knotenmenge V besitzen
  - und eine **gerichtete** Kante (i, j) genau dann in G' vorkommt, wenn $\{i, j\}$ eine (**ungerichtete**) Kante von G ist,

sowie die Übergangsmatrix P mit

$$P_{i,j} := \begin{cases} \frac{1}{d_i} & \text{falls } \{i,j\} \text{ eine Kante von } G \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Markov-Ketten: Irrfahrten auf ungerichteten Graphen (2/2)

Was möchte man gerne wissen?

(?) Ab welcher Länge besucht eine Irrfahrt wahrscheinlich alle Knoten von G?

- Die erwartete Länge einer Irrfahrt, die alle Knoten des Graphen $G = (V, E)$ besucht, ist höchstens $2|V| \cdot |E|$. (Siehe Vorlesung „Effiziente Algorithmen".)

  *Man sagt auch, dass die „**Cover-Time**" des Graphen durch $2|V| \cdot |E|$ beschränkt ist.*

- Für reguläre Graphen, also für Graphen in denen jeder Knoten dieselbe Anzahl von Nachbarn besitzt, ist die Cover-Time höchstens $4 \cdot |V|^2$.

(?) Was ist die relative Häufigkeit mit der ein Knoten $i \in V$ in einer genügend langen Irrfahrt besucht wird?

- Antwort später.

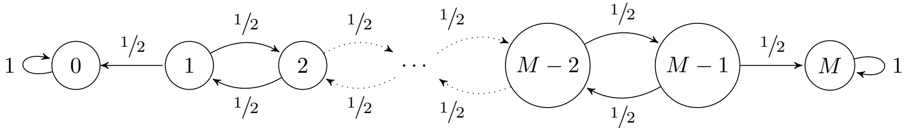
Markov-Ketten: „Gambler's Ruin" (1/2)

Ein Spieler tritt gegen das Casino an:
Bei einem Einsatz von 1 € ist der Gewinn/Verlust in jeder Runde ebenfalls 1 €.

Der Spieler hat ein Kapital von K €, das Casino von N €.

Die **Markov-Kette**:

1. Wir verwenden die Zustände $0, \ldots, M$ mit $M = K + N$
2. und erlauben Übergänge vom Zustand $0 < i < n$ zu den Zuständen $i - 1$ und $i + 1$ mit der Wahrscheinlichkeit von jeweils $1/2$.
   - Die Kette beginnt im Zustand K.
   - Im Zustand 0 ist der **Spieler ruiniert**, im Zustand M das **Casino gesprengt**: (Die Kette verbleibt im Zustand 0 bzw. M mit Wahrscheinlichkeit 1.)



Markov-Ketten: „Gambler's Ruin“ (2/2)

Was möchte man gerne wissen?

? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit s_K, dass der Spieler die Bank sprengt, wenn Casino und Spieler bis zum bitteren Ende spielen?

- Es ist $s_K = K/M$.
- Relativ gute Chancen, die Bank zu sprengen, selbst wenn K viel kleiner als M ist!

? Deshalb sind leider in professionellen Casinos alle Spiele unfair.

- Sei p die Gewinnwahrscheinlichkeit des Spielers und es gelte $p \neq 1/2$. Weiterhin sei $q := 1 - p$ die Komplementärwahrscheinlichkeit.
- Es kann gezeigt werden:

$$s_K = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^K - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^M - 1}.$$

Für $p < 1/2$ gilt

$$\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^K - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^M - 1} \leqslant \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^K}{\left(\frac{q}{p}\right)^M} = \left(\frac{q}{p}\right)^{-N}.$$

Die Erfolgswahrscheinlichkeit s_K für den Spieler fällt **exponentiell** mit N :-((

2-SAT: Ein effizienter Algorithmus (1/2)

Die KNF-Formel

$$\alpha = \bigwedge_{i=1}^{m} \left(\ell_{i,1} \vee \ell_{i,2}\right)$$

besitzt höchstens 2 Literale pro Disjunktionsterm. Ist α erfüllbar?

Annahme: α besitze n Variablen und werde von der Belegung $x^* \in \{0,1\}^n$ erfüllt.

Ein würfelnder Algorithmus:

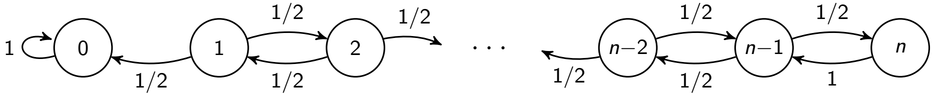
1. Würfel eine zufällige Belegung $x \in \{0,1\}^n$ aus.
2. Wiederhole genügend oft:
   (a) Bestimme irgendeinen von x falsifizierten Disjunktionsterm $D = \ell \vee \ell'$.
   (b) Wähle $L \in \{\ell, \ell'\}$ zufällig aus: Modifiziere x, so dass L erfüllt wird, d.h. „flippe" die Belegung der Variablen von L.

   # x^* erfüllt D und deshalb auch ℓ oder ℓ'.
   # Mit Wahrscheinlichkeit $\geqslant \frac{1}{2}$ stimmen x, x^* in einer Variablen mehr überein,
   # mit Wahrscheinlichkeit $\leqslant \frac{1}{2}$ stimmen x, x^* in einer Variablen weniger überein.

Wie häufig muss wiederholt werden, bis eine erfüllende Belegung gefunden wird?

2-SAT: Ein effizienter Algorithmus (2/2)

Wie verhält sich $H(x, x^*)$, der Hammingabstand[1] zwischen x und x^* im schlimmsten Fall? Analysiere die folgende Markov-Kette:



- Zustand i entspricht dem aktuellen Hammingabstand i. Insbesondere haben wir x^* im Zustand 0 gefunden.
- Zustandsübergänge protokollieren den Verlauf des Algorithmus.

Aufgabe 9.4: Der Algorithmus findet x^* nach einer erwarteten Anzahl von höchstens n^2 Wiederholungen, wenn nicht vorher eine andere erfüllende Belegung gefunden wird.

[1] $H(x, x^*)$ ist die Anzahl der Variablen, für die sich x und x^* unterscheiden.

Markov-Ketten: Die Ehrenfest-Kette (1/2)

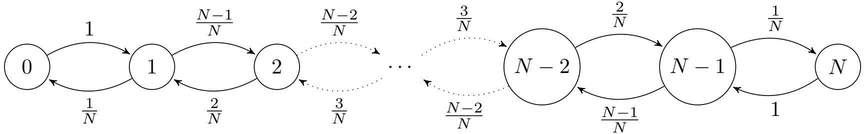
Zwei Substanzen sind durch eine Membran getrennt, aber Moleküle wandern über die Membran zwischen den beiden Substanzen.

Modellierung: In jedem Schritt wird eines der N Partikel gleichverteilt, also mit Wahrscheinlichkeit $1/N$ ausgewählt und auf die jeweils andere Seite verschoben.

Unsere **Markov-Kette $(\mathbf{G}, \mathbf{P})$** besitzt den Graphen $G = (V, E)$ mit

- Knotenmenge $V = \{0, 1, \dots, N\}$
- und den Kanten $i \to i+1$ und $i \to i-1$ für $i = 1, \dots, N-1$ sowie den Kanten $0 \to 1$, $N \to N-1$

und die Übergangsmatrix P mit $P_{i,j} := \begin{cases} \frac{i}{N} & \text{falls } j = i-1, \\ 1 - \frac{i}{N} & \text{falls } j = i+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$



Markov-Ketten: Die Ehrenfest-Kette (2/2)

Was möchte man gerne wissen?

Angenommen, wir lassen Partikel „hinreichend oft“ wandern:

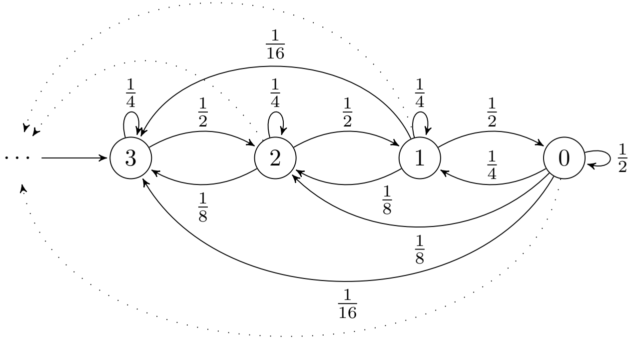
> *Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzt die linke Seite genau ℓ Partikel?*

Wir werden diese Frage später beantworten.

Markov-Ketten: Warteschlangen

Wir modellieren die **Warteschlange** vor einer Supermarktkasse:

- Die **unendliche** Menge $V = \mathbb{N}$ ist Zustandsmenge: Im Zustand $i \in V$ warten i Kunden an der Kasse.
- Pro Zeitschritt bezahlt ein wartender Kunde, neue Kunden treffen ein. Z.B. treffen k neue Kunden mit Wahrscheinlichkeit 2^{-k-1} ein.



Was möchte man gerne wissen? Was ist die erwartete Länge der Warteschlange?

Zusammenfassung: Was ist bisher passiert?

(a) Wie definiert man das **Renommee einer Webseite** w?

- Mit PR_w, falls das Tupel PR die **Page-Rank-Eigenschaft** besitzt oder
- mit der Wahrscheinlichkeit PR^*_w mit der der **Zufallssurfer** die Seite w besucht?

(b) Der Zufallssurfer unternimmt eine **Irrfahrt** auf G. Mit einer Markov-Kette $\mathcal{M} = (G, P)$ können wir Irrfahrten im gerichteten Graphen G untersuchen.

- Wenn (i, j) eine Kante von G ist, dann läuft die Irrfahrt mit Wahrscheinlichkeit

$$P_{i,j}$$

in einem Schritt von Zustand i nach Zustand j

(c) Irrfahrten und das **Vektor-Matrix-Produkt**:

Wenn sich die Kette $\mathcal{M} = (G, P)$ anfänglich in der Verteilung π befindet,

- (d.h. Zustand i wird mit Wahrscheinlichkeit π_i besucht)

dann befindet sie sich nach k Schritten im Zustand $\pi \cdot P^k$.

- (d.h. Zustand i wird mit Wahrscheinlichkeit $(\pi \cdot P^k)_i$ besucht)

Gilt $\mathrm{PR} = \mathrm{PR}^*$?

Grenzverteilung und Grenzmatrix

Die Grenzverteilung einer Markov-Kette

$\mathcal{M} = (G, P)$ sei eine Markov-Kette. Die Verteilung

$$\mathcal{G}(\mathcal{M})$$

heißt **Grenzverteilung der Kette**, wenn für **alle** Anfangsverteilungen π gilt:

$$\lim_{k \to \infty} \pi \cdot P^k = \mathcal{G}(\mathcal{M}).$$

Schließlich ist $P^\infty := \lim_{k \to \infty} P^k$ die **Grenzmatrix**.

Sei $\mathcal{W} := (\vec{K}_n, P_d(\mathrm{W\scriptstyle EB}))$ die **Webkette**.

Wenn die Webkette $\mathcal{W}$ eine Grenzverteilung und Grenzmatrix besitzt, dann ist

$$\mathrm{PR}^* = \mathcal{G}(\mathcal{W}) = \lim_{k \to \infty} \pi \cdot (P_d(\mathrm{W\scriptstyle EB}))^k \stackrel{!}{=} \pi \cdot \lim_{k \to \infty} P^k = \pi \cdot P^\infty.$$

Existiert die Grenzverteilung überhaupt?

Wenn $\mathcal{M} = (G, P)$ eine schöne Markov-Kette ist,

(a) dann existiert die Grenzmatrix

$$P^\infty := \lim_{k\to\infty} P^k$$

(b) und die Irrfahrt vergisst ihren Startpunkt: Für alle i, i^*, j gilt

$$(P^\infty)_{i,j} = \lim_{k\to\infty} (P^k)_{i,j} = \lim_{k\to\infty} (P^k)_{i^*,j} = (P^\infty)_{i^*,j}.$$

Also sind alle Zeilen von P^∞ identisch.

Wenn $\mathcal{M}$ schön ist, dann existieren Grenzwerte und alle Zeilen der Grenzmatrix P^∞ stimmen überein mit der ersten Zeile

$$z = \left((P^\infty)_{1,j} \,:\, 1 \leqslant j \leqslant n \right) = \left((\lim_{k\to\infty} P^k)_{1,j} \,:\, 1 \leqslant j \leqslant n \right)$$

$\Longrightarrow$ Für alle π gilt: $\pi \cdot P^\infty = \pi \cdot \begin{pmatrix} z \\ \vdots \\ z \end{pmatrix} = z$

Ergodische Ketten: Schöne Markov-Ketten

„schön“ = ergodisch

Eine Markov-Kette (G, P) mit $G = (V, E)$ ist **ergodisch**, wenn

(a) die Grenzwahrscheinlichkeiten $\lim_{k\to\infty}(P^k)_{i,j}$ und $\lim_{k\to\infty}(P^k)_{i^*,j}$ für alle Zustände i, i^*, j existieren und übereinstimmen sowie

(b) $\lim_{k\to\infty}(P^k)_{i,j} > 0$ für alle Zustände i, j gilt.

Die Markov-Kette $\mathcal{M} = (G, P)$ sei ergodisch und z sei die erste Zeile von P^∞. Dann gilt für jede Verteilung π

$$\pi \cdot P^\infty = z = \left(\lim_{k\to\infty} \left(P^k\right)_{1,1}, \ldots, \lim_{k\to\infty} \left(P^k\right)_{1,n}\right) = \mathcal{G}(\mathcal{M}).$$

Wenn die Webkette $\mathcal{W}$ ergodisch ist, ist

$$\mathrm{PR}^* = \pi \cdot P^\infty = \mathcal{G}(\mathcal{W})$$

für jede Anfangsverteilung π und PR^* stimmt mit jeder Zeile von P^∞ überein.

Das Leben ist hart, oder?

Der Graph G sei **bipartit**.

- Wenn wir eine Irrfahrt in einem Knoten i beginnen, ist

$$(P^{2k+1})_{i,i} = 0,$$

  denn ein bipartiter Graph hat keine Kreise ungerader Länge.
- Der Grenzwert $\lim_{k\to\infty}(P^k)_{i,i}$ existiert nicht, wenn $\lim_{k\to\infty}(P^{2k})_{i,i} > 0$ gilt

:-((

Aber der vollständige Graph $\vec{K}_n$ der Webkette ist doch nicht bipartit!

:-))

Es ist bald Weihnachten!

Was sollten wir uns von dem Graphen G einer schönen, d.h. ergodischen Kette $\mathcal{M} = (G, P)$ wünschen?

Sei G ein gerichteter Graph.

(a) G heißt genau dann **irreduzibel**, wenn G stark zusammenhängend ist.

(b) Ein Zustand $i \in V$ hat die **Periode** p, wenn die Längen *aller* (nicht notwendigerweise einfachen) Wege von i nach i durch p teilbar sind.

G heißt **aperiodisch** $\iff$ **kein** Zustand besitzt eine Periode $p > 1$.

Man kann zeigen:

Die Markov-Kette (G, P) ist ergodisch $\iff$ G ist irreduzibel und aperiodisch.

$\Longrightarrow$:

i) G muss irreduzibel sein, denn $\lim_{k\to\infty}(P^k)_{i,j} > 0$ wird für alle i, j gefordert.

ii) Der Zustand i darf keine Periode haben, denn sonst existiert $\lim_{k\to\infty}(P^k)_{i,i}$ nicht!

$\Longleftarrow$: Siehe die „Stochastik für die Informatik“ (StI).

Was ist bisher passiert?

(a) Wie definiert man das **Renommee einer Webseite** w?
- Mit PR_w, falls das Tupel PR die **Page-Rank-Eigenschaft** besitzt oder
- mit der Wahrscheinlichkeit PR^*_w mit der der **Zufallssurfer** die Seite w besucht?

(b) Der Zufallssurfer unternimmt eine **Irrfahrt** auf G. Mit einer **Markov-Kette**

$$\mathcal{M} = (G, P)$$

können wir Irrfahrten im gerichteten Graphen G untersuchen.

(c) Irrfahrten und das **Vektor-Matrix-Produkt**: Befindet sich $\mathcal{M} = (G, P)$ in Verteilung π, dann ist sie nach k Schritten in Verteilung

$$\pi \cdot P^k.$$

(d) $\lim_{k\to\infty} P^k = P^\infty$ ist die **Grenzmatrix**. $\mathcal{M}$ hat die **Grenzverteilung** $\mathcal{G}(\mathcal{M})$, wenn $\mathcal{G}(\mathcal{M}) = \pi \cdot P^\infty$ f.a. Verteilungen π gilt.

(e) Für eine **ergodische** Kette (G, P) – d.h. G ist **irreduzibel** und **aperiodisch** – stimmt jede Zeile von P^∞ mit der Grenzverteilung überein.

Gilt $\mathrm{PR} = \mathrm{PR}^*$?

(a) Die Webkette $\mathcal{W} = (\vec{K_n}, P_d(\textrm{WEB}))$ ist **ergodisch**, denn für alle Knoten i, j besitzt $\vec{K_n}$ eine Kante (i, j) .

- $\vec{K_n}$ ist sicherlich irreduzibel, denn es gibt eine Kante zwischen je zwei Knoten
- und aperiodisch, denn wir können in **einem** Schritt von i nach i laufen.

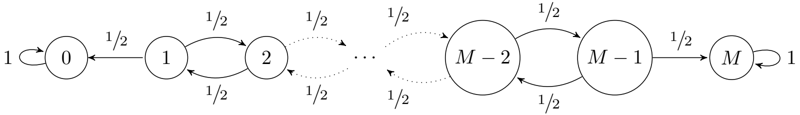
Aber, wie bestimmt man die Grenzverteilung $\mathcal{G}(\mathcal{W})$?

(b) Die Markov-Kette $\mathcal{M} = (G', P)$ zu einer Irrfahrt auf einem **zusammenhängenden, nicht-bipartiten** Graphen $G = (V, E)$ ist **ergodisch**.

- Zur Erinnerung: Es ist $G' = (V, \{(i,j) : \{i,j\} \in E\})$.
- G ist zusammenhängend $\Longrightarrow$ der Graph G' der Kette ist irreduzibel.
- Warum ist G' aperiodisch? Sei u ein Zustand von G'.
  - u ist Teil eines Kreises in G' der Länge 2: Laufe von u zu einem Nachbarn und zurück.
  - G ist genau dann nicht bipartit, wenn G einen Kreis ungerader Länge hat.

Aber, wie bestimmt man die Grenzverteilung $\mathcal{G}(\mathcal{M})$?

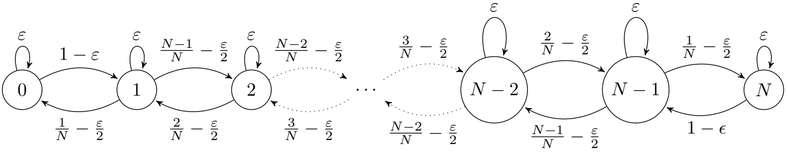
(c) „Gambler's Ruin“: Die Kette



ist **nicht ergodisch**, denn die Zustände 0 und $M = K + N$ sind „**absorbierend**“ und der Graph ist nicht irreduzibel.

(d) Die Ehrenfest-Kette ist **nicht ergodisch**: Der Graph der Kette ist bipartit.

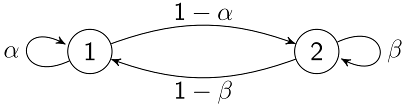
- Führe Eigenschleifen mit Wahrscheinlichkeit ε ein.



- Jeder Knoten hat die Periode 1 aufgrund der Eigenschleifen: Die neue Kette ist also irreduzibel wie auch aperiodisch und deshalb **ergodisch**.
- Wie sieht ihre Grenzverteilung aus?

(e) Die „Warteschlangenkette“ ist irreduzibel und aperiodisch, aber sie besitzt **unendlich viele Zustände**: Im Allgemeinen folgt Ergodizität leider nicht.

(f) Für welche Werte von α, β ist die folgende Kette ergodisch?



Der alte und der neue Page-Rank

! Der neue Page-Rank PR^* stimmt mit der Grenzverteilung $\mathcal{G}(\mathcal{W})$ der Webkette überein.

? Stehen alter und neuer Page-Rank miteinander in Beziehung?

? Lässt sich der neue, bzw. der alte Page-Rank effizient berechnen?

Stationäre Verteilungen

Stationäre Verteilungen

Sei (G, P) eine Markov-Kette mit $G = (V, E)$ und es gelte $V = \{1, \ldots, n\}$.

Eine Verteilung π auf V heißt **stationär** für die Markov-Kette (G, P), falls

$$\pi \cdot P = \pi.$$

- Die Kette (G, P), wenn in der Verteilung π gestartet, befindet sich nach einem Schritt in der Verteilung $\pi \cdot P = \pi$.
- Die Verteilung π ist stationär für (G, P) $\iff$ die Kette bleibt in π „stecken“.

Der Page-Rank ist eine stationäre Verteilung! (1/2)

Der Page-Rank PR ist eine Verteilung, denn

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \mathrm{PR}_j \overset{\textit{Definition}}{=} \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1-d}{n} + d \cdot \sum_{i \in \mathrm{Vor}(j)} \frac{\mathrm{PR}_i}{a_i}\right) &= n \cdot \frac{1-d}{n} + d \cdot \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in \mathrm{Vor}(j)} \frac{\mathrm{PR}_i}{a_i} \\
= (1-d) + d \cdot \sum_{(i,j) \in E} \frac{\mathrm{PR}_i}{a_i} &= (1-d) + d \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j:(i,j) \in E} \frac{\mathrm{PR}_i}{a_i} \\
= (1-d) + d \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(a_i \cdot \frac{\mathrm{PR}_i}{a_i}\right) &= (1-d) + d \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{PR}_i
\end{aligned}$$

Also folgt $(1-d) \cdot \sum_{j=1}^{n} \mathrm{PR}_j = (1-d)$ bzw. $\sum_{j=1}^{n} \mathrm{PR}_j = 1$ ✓

Der Page-Rank ist eine stationäre Verteilung! (2/2)

Sei $P_d(\textsc{Web})$ die Page-Rank-Matrix, also

$$(P_d(\textsc{Web}))_{i,j} = \frac{1-d}{n} + d \cdot \begin{cases} \frac{1}{a_i} & i \in \text{Vor}(j), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Page-Rank ist stationär, denn

$$\begin{aligned}
\text{PR}_j &\overset{\text{Definition von PR}}{=} \frac{1-d}{n} \cdot 1 \quad + \; d \cdot \sum_{i \in \text{Vor}(j)} \frac{\text{PR}_i}{a_i} \\
&\overset{\text{PR ist eine Verteilung}}{=} \frac{1-d}{n} \cdot \sum_{i \in \{1,\ldots,n\}} \text{PR}_i + d \cdot \sum_{i \in \text{Vor}(j)} \frac{\text{PR}_i}{a_i} \\
&= \sum_{i \in \{1,\ldots,n\}} \text{PR}_i \cdot \left(\frac{1-d}{n} + d \cdot \begin{cases} \frac{1}{a_i} & i \in \text{Vor}(j), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \right) \\
&\overset{\text{Definition von } P}{=} \sum_{i \in \{1,\ldots,n\}} \text{PR}_i \cdot (P_d(\textsc{Web}))_{i,j} = \big(\text{PR} \cdot P_d(\textsc{Web})\big)_j \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Und jetzt Geschenke auspacken!

Der Hauptsatz für ergodische Markov-Ketten

$\mathcal{M} = (G, P)$ sei eine **ergodische** Markov-Kette.

Dann gibt es genau eine **stationäre Verteilung** σ und σ stimmt mit der **Grenzverteilung** überein, d.h. es gilt

$$\mathcal{G}(\mathcal{M}) = \sigma.$$

Eine wichtige Konsequenz: Für die Webkette gilt

$$\mathbf{PR} = \mathbf{PR}^*.$$

Alter und neuer Page-Rank stimmen überein!

Die stationäre Verteilung ist gleichzeitig Grenzverteilung! Und warum stimmt das?

Schritt 1: Die Grenzverteilung $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ ist stationär!

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{G}(\mathcal{M}) \cdot P)_j &= \sum_{i=1}^{n} (\lim_{k\to\infty} (P^k)_{1,i}) \cdot P_{i,j} = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (P^k)_{1,i} \cdot P_{i,j} \\
&= \lim_{k\to\infty} P_{1,j}^{k+1} = \lim_{k\to\infty} P_{1,j}^{k} \\
&= (\mathcal{G}(\mathcal{M}))_j.
\end{aligned}
$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ die einzige stationäre Verteilung ist.

Schritt 2: Es gibt genau eine stationäre Verteilung

Sei π eine beliebige stationäre Verteilung für die Kette (G, P).

1. Dann ist $\pi = \pi \cdot P$ und deshalb gilt $\pi = \pi \cdot P^k$ für jede natürliche Zahl k. Es folgt $\pi = \lim_{k \to \infty} \pi \cdot P^k = \pi \cdot P^\infty$.
2. Aber das ist doch die Grenzverteilung, denn

$$\pi \quad = \quad \pi \cdot P^\infty = \mathcal{G}(\mathcal{M}).$$

Es ist $\pi = \mathcal{G}(\mathcal{M})$ und *die* stationäre Verteilung stimmt mit *der* Grenzverteilung überein.

Stationäre Verteilungen: Beispiele

Irrfahrten in ungerichteten Graphen

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängenden und nicht-bipartiter Graph. Dann besucht eine Irrfahrt den Knoten v mit Wahrscheinlichkeit

$$\pi_v = \frac{d_v}{2|E|}.$$

Ein Knoten wird mit Wahrscheinlichkeit proportional zu seinem Grad d_v besucht!

- ✓ Die Markov-Kette für Irrfahrten in ungerichteten, nicht-bipartiten Graphen ist ergodisch.
- ! Zeige für $d_v = |\text{Nachbarn von } v|$:
  Die Verteilung π mit $\pi_v := \frac{d_v}{2|E|}$ ist stationär – sogar für bipartite Graphen.
- ! Zeige $\pi \cdot P = \pi$ (für die Übergangsmatrix P eines beliebigen ungerichteten Graphen).

$$\begin{aligned}(\pi \cdot P)_v &= \sum_{u \in V} \pi_u \cdot P_{u,v} = \sum_{u \in V} \frac{d_u}{2|E|} \cdot P_{u,v} = \sum_{u \in V \text{ mit } \{u,v\} \in E} \frac{d_u}{2|E|} \frac{1}{d_u} \\ &= \sum_{u \in V \text{ mit } \{u,v\} \in E} \frac{1}{2|E|} = \frac{d_v}{2|E|} = \pi_v. \qquad \checkmark\end{aligned}$$

Symmetrische Ketten

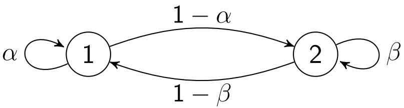
Sei (G, P) eine Markov-Kette und die Matrix P sei **symmetrisch**, d.h. $P_{i,j} = P_{j,i}$ gilt für alle Knoten i, j. Dann ist die Gleichverteilung $\sigma = (1/n, \ldots, 1/n)$ stationär.

Warum?

$$\begin{aligned}(\sigma \cdot P)_j &= \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot P_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot P_{i,j} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} P_{i,j} \\ &\overset{P \text{ ist symmetrisch}}{=} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} P_{j,i} \overset{P \text{ ist stochastisch}}{=} \frac{1}{n} = \sigma_j.\end{aligned}$$

Also gilt $\sigma \cdot P = \sigma$ und die Gleichverteilung ist tatsächlich stationär $\Longrightarrow$ Jeder der n Zustände hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$.

Stationäre Verteilungen: Welches Gleichungssystem?



Eine Verteilung $\sigma = (x, y)$ ist genau dann stationär für (G, P), wenn $\sigma \cdot P = \sigma$ gilt.

$$\begin{aligned}
\sigma \cdot P \quad &= \quad (\, x \,,\, y \,) \, \cdot \, \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{pmatrix} \\
&= \quad (\; x \cdot \alpha + y \cdot (1-\beta), \quad x \cdot (1-\alpha) + y \cdot \beta \;) \\
&\overset{!}{=} \quad \sigma = (\, x, y \,)\,.
\end{aligned}$$

Also führt die Forderung $\sigma P \overset{!}{=} \sigma$ auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
x \cdot \alpha + y \cdot (1-\beta) \quad &\overset{!}{=} \quad x \\
x \cdot (1-\alpha) + y \cdot \beta \quad &\overset{!}{=} \quad y.
\end{aligned}$$

Huch!

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x \cdot \alpha + y \cdot (1-\beta) &\stackrel{!}{=} x \\ x \cdot (1-\alpha) + y \cdot \beta &\stackrel{!}{=} y. \end{aligned}$$

ist äquivalent mit

$$x \cdot (1-\alpha) \stackrel{!}{=} y \cdot (1-\beta).$$

Wir erhalten einen 1-dimensionalen Lösungsraum: Was ist passiert?

Wenn $\sigma \cdot P = \sigma$, dann gilt auch $\lambda\sigma \cdot P = \lambda\sigma$ für jedes Vielfache $\lambda \in \mathbb{R}$.

Wir müssen fordern, dass σ eine Verteilung ist, d.h. das $x + y = 1$ gilt.

Und die Lösung ist:

Wir erhalten das neue Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x \cdot (1-\alpha) &= y \cdot (1-\beta) \\ y &= 1-x \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$x = \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta} \text{ und } y = \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta}.$$

Die Kette besitzt eine eindeutige stationäre Verteilung, falls $\alpha < 1$ oder $\beta < 1$.

Beachte, dass die Kette genau dann ergodisch ist, wenn

$$\big(\alpha > 0 \text{ oder } \beta > 0\big) \text{ und } \alpha < 1 \text{ und } \beta < 1$$

Also besitzen auch einige nicht-ergodische Ketten eindeutige stationäre Verteilungen.

Stationäre Verteilungen der (ergodischen) Ehrenfest-Kette

Die Verteilung π mit

$$\pi_i = \binom{n}{i} / 2^n$$

für $i = 0, \ldots, n$ ist stationär.

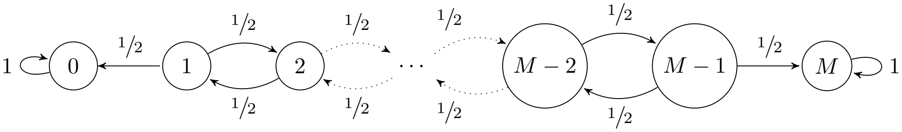
1. π ist die einzige stationäre Verteilung und
2. π stimmt mit der Grenzverteilung überein.

Auf der linken Seite der Membran befinden sich ℓ Partikel mit Wahrscheinlichkeit

$$\binom{n}{\ell} / 2^n.$$

Man sagt, dass π eine **Binomialverteilung** ist.

Stationäre Verteilungen im „Gambler's Ruin“



1. Wenn wir im Zustand 0 starten, bleiben wir stecken:
   Die Verteilung $(1, 0, \ldots, 0)$ ist stationär.
2. Gleiches gilt für den Zustand M: Die Verteilung $(0, \ldots, 0, 1)$ ist stationär.
3. Alle „Konvexkombinationen“, also alle Verteilungen

$$(\lambda, 0, \ldots, 0, 1 - \lambda)$$

   für $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ sind stationär.

Diese Markov-Kette hat **unendlich** viele stationäre Verteilungen!

Lässt sich der Page-Rank schnell und gut approximieren?

Page-Rank: Eine effiziente Approximation (1/2)

Sei $\mathcal{M} = (G, P)$ eine ergodische Markov-Kette.

1. Sei $\pi^{(0)} := \pi$ eine beliebige Verteilung auf $\{1, \ldots, n\}$ und setze
$$\pi^{(k+1)} = \pi^{(k)} \cdot P.$$
2. Nach k Schritten befindet sich die Kette in der Verteilung
$$\pi^{(k)} := \pi \cdot P^k.$$
3. Wenn k genügend groß ist, dann ist
$$\pi^{(k)} = \pi \cdot P^k \approx \pi \cdot P^\infty = \mathcal{M}(\mathcal{G}).$$

Page-Rank: Eine effiziente Approximation (2/2)

- Es ist $\pi^{(k)} \approx \mathcal{G}(\mathcal{M})$ wenn k „genügend“ groß ist.
- Um $\pi^{(k)}$ zu bestimmen, berechne

$$\pi^{(1)} = \pi^{(0)} \cdot P, \pi^{(2)} = \pi^{(1)} \cdot P, \ldots, \pi^{(k)} = \pi^{(k-1)} \cdot P.$$

✓ Die Berechnung eines jeden der k Vektor-Matrix Produkte ist „hochgradig parallelisierbar“.

✓ $\pi^{(k)} \approx \mathcal{G}(\mathcal{M})$ bereits für kleine Werte von k:

- Das Web ist „hoch-gradig zusammenhängend“.
- Die Hypothese des „**Kleine-Welt-Phänomens**“ besagt, dass in vielen sozialen Netzwerken (fast) jeder Mensch mit jedem anderen über eine Kette von höchstens **6** Bekanntschaftsbeziehungen verbunden ist.

:-)) Es ist alles gut! :-))

Zusammenfassung

Zusammenfassung: Markov-Ketten

Die Kette $\mathcal{M} = (G, P)$ besteht aus einer stochastischen Übergangsmatrix P und einem gerichteten Graphen $G = (\{1, \ldots, n\}, E)$ mit $(i, j) \in E \iff P_{i,j} > 0$.

(a) Ein Schritt der Markov-Kette $\mathcal{M}$ kann durch das Matrix-Vektor Produkt $\pi \cdot P$ beschrieben werden:
   - Wenn ein Zustand i mit Wahrscheinlichkeit π_i ausgewürfelt wird, dann befindet sich die Kette nach einem Schritt im Zustand j mit Wahrscheinlichkeit $(\pi \cdot P)_j$.

(b) Eine **stationäre Verteilung** σ ist Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\sigma \cdot P = \sigma.$$

(c) (G, P) ist **ergodisch**, wenn G irreduzibel (bzw. stark zusammenhängend) und aperiodisch ist.
   - **Der Hauptsatz für ergodische Markov-Ketten**: Eine ergodische Kette besitzt genau eine **stationäre Verteilung** $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ und $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ ist die **Grenzverteilung**.

Zusammenfassung: Page-Rank

(a) Durch das Hinzufügen von „neuen Kanten" – entsprechend dem „Grundeinkommen" – wird die Webkette **ergodisch**.

(b) Der Ansatz des **Peer-Reviews** PR_v:
- Die Webseite v vererbt ihr Renommee anteilig auf jede Webseite w, auf die sie einen Hyperlink gesetzt hat.
- Der Page-Rank ist die stationäre Verteilung der Webkette.

(c) Der Ansatz des **Zufallssurfers**: Bestimme die relative Häufigkeit PR^*_v des Besuchs von v:
- Die Webkette ist ergodisch: Die Grenzwahrscheinlichkeit π_v, also die Wahrscheinlichkeit, dass der Zufallssurfer die Seite v am Ende einer langen Irrfahrt besucht, existiert.
- Das Kleine-Welt-Phänomen: Die Konvergenz gegen gegen π_v ist schnell.

(d) Mit dem Hauptsatz für Markov-Ketten: $\mathrm{PR} = \mathrm{PR}^*$
- Für vernünftige Anfangsverteilungen π und „kleine" Werte von k gilt

$$\pi \cdot \left(P_d(\mathrm{W{\scriptsize EB}})\right)^k \approx \mathrm{PR}^* = \mathrm{PR}.$$