


## Übungsblatt 2

Ausgabe: 24.10.2019  
Abgabe: 31.10.2019

### Aufgabe 2.1 Modellierung: Fortnite Battle Royale (6 + 6 + 5 + 6 + 5 = 28 Punkte)

Seit einiger Zeit erfreut sich das Spiel *Fortnite: Battle Royale* großer Beliebtheit. In dem Spiel treten 100 Spieler gegeneinander an, sammeln Waffen, andere Gegenstände und Rohstoffe und bekämpfen einander. Der letzte Überlebende gewinnt das Spiel.

Wir wollen hier einige Aspekte des Spiels in vereinfachter Form mithilfe von Mengen modellieren.

- a) Es gibt folgende Typen von *Gegenständen*: *Waffen* (z. B. Pistole, Raketenwerfer, Dynamit, ...), *Heilungsgegenstände* (z. B. Medikit, Schildtrank, ...) und *sonstige* (z. B. Angel). Manche Waffen sind *Gewehre* (z. B. Sturmgewehr), manche sind *Granaten* (z. B. Boogiebombe), manche keines von beidem (z. B. Raketenwerfer). 

Seien die Mengen **Wa**, **He** und **So** der Waffen, Heilungsgegenstände und sonstigen Gegenstände gegeben, sowie die Mengen **Gewehre**  $\subseteq$  **Wa** und **Granaten**  $\subseteq$  **Wa** der Gewehre bzw. Granaten.

- i) Definieren Sie die Menge **G** aller Gegenstände (beliebigen Typs).
  - ii) Geben Sie die Menge aller Waffen an, die weder Gewehre noch Granaten sind.
- b) Jeder Gegenstand kann in einem oder mehreren *Seltenheitsgraden* (gewöhnlich, ungewöhnlich, selten, episch, legendär) vorkommen.  
Sei **Se** die Menge aller Seltenheitsgrade und **Vor**  $\subseteq$  **G**  $\times$  **Se** die Relation aller im Spiel vorkommenden Kombinationen aus Gegenstand und Seltenheitsgrad.
- i) Welches Element in **Vor** bezeichnet einen legendären Raketenwerfer?
  - ii) Definieren Sie mithilfe der Menge **Vor** die Menge **G<sub>episch</sub>**  $\subseteq$  **G** aller Gegenstände, die im Spiel mit dem Seltenheitsgrad *episch* vorkommen.
- c) Jeder Spieler kann Gegenstände in seinem *Inventar* sammeln. Jeder Gegenstand kann höchstens einmal im Inventar auftauchen und das Inventar darf nicht mehr als fünf Gegenstände enthalten.
- i) Definieren Sie die Menge **I** aller (möglichen) Inventare.
  - ii) Welches Element in **I** drückt aus, dass Sie nur ein Medikit und eine Angel im Inventar haben?
- d) Der *Zustand* eines Spieler wird charakterisiert durch sein Inventar, die Anzahl seiner Hitpoints (zwischen 1 und 100) sowie seinem aktuell getragenen Gegenstand. (Der Einfachheit halber fordern wir nicht, dass der getragene Gegenstand im Inventar des Spielers vorhanden sein muss.)
- i) Definieren Sie die Menge **Z** aller (möglichen) Zustände.
  - ii) Welches Element in **Z** gibt an, dass Sie eine Armbrust (und sonst nichts) im Inventar haben, 50 Hitpoints besitzen und aktuell eine Armbrust tragen?

- e) Im Spiel sind Truhen versteckt, in denen Gegenstände sowie Rohstoffe zu finden sind. Jeder Gegenstand taucht höchstens einmal auf. Eine Truhe kann einen, mehrere oder gar keine Gegenstände enthalten, sowie drei *Anzahlen* (zwischen 0 und 999) für die jeweiligen Rohstoffe *Holz*, *Stein* und *Metall*.

Beispiel: Eine Truhe kann eine Angel, einen Raketenwerfer, 10 Holz, 20 Stein und 30 Metall enthalten.

Der Inhalt einer Truhe hängt nur von ihrer *Art* (Goldene Truhe, Vorratslieferung, Vorratslama, ...) ab. Sei  $\mathbf{A}$  die Menge aller Arten von Truhen.

Für eine Truhe der Art  $x$  sei  $\mathbf{inhalt}(x)$  der Inhalt der Truhe, wobei  $\mathbf{inhalt} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  eine Funktion ist. Definieren Sie geeignete Mengen  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$ .



**Aufgabe 2.2** *Komplemente, kartesische Produkte, Potenzmengen* (12 + 10 = 22 Punkte)

- a) Gegeben sei das Universum  $U := \mathbb{N}$ , die Menge  $X := \{3, 5, 11\}$ , die Menge  $Y := \{1, 2, 4, 8\}$  und die Menge  $Z := \{1, 3, 5, \dots\}$  aller ungeraden natürlichen Zahlen.

Geben Sie jede der folgenden Mengen in extensionaler Form an. Geben Sie, wenn möglich, auch einen kurzen Rechenweg oder eine kurze Begründung an.

- |  |   |
|--|---|
| i) $(\overline{Z} \cap Y) \times (X \setminus \{1, 5\})$ | iii) $\{p \in \mathcal{P}(X) :  p  \geq 2\}$                        |
| ii) $(Y \times X) \cap (X \times Y)$                     | iv) $\bigcap_{x \in X} \left( \bigcup_{i=0}^{10} \{x + i\} \right)$ |

- b) Seien  $A$  und  $B$  beliebige Mengen. Zeigen Sie:

- i) Wenn  $A \subseteq B$  gilt, dann gilt  $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ .  
 ii) Wenn  $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$  gilt, dann gilt  $A \subseteq B$ .

**Aufgabe 2.3** *Funktionen*

(13 + 12 = 25 Punkte)

- a) Betrachten Sie folgende Funktionen:

- i)  $f_1 : \{1, 2, 3, 4\}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $f_1(a, b) := a \cdot b$   
 ii)  $f_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$  mit  $f_2(n) := \{m \in \mathbb{N} : m \leq n \text{ und } m \text{ ist eine Primzahl}\}$   
 iii)  $f_3 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $f_3(m, n) := n + \frac{m \cdot (m+1)}{2}$   
 iv)  $f_4 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $f_4(m, n) := n + \frac{(m+n)(m+n+1)}{2}$

Geben Sie für jede der obigen Funktionen  $f_i$  an, ob sie injektiv ist **und** ob sie surjektiv ist. Geben Sie für jede nicht-injektive Funktion  $f_i$  zwei Elemente  $x, y \in \text{Def}(f_i)$ , sodass  $x \neq y$  und  $f_i(x) = f_i(y)$  gilt. Geben Sie für jede nicht-surjektive Funktion  $f_i$  ein Element  $x$  aus dem Bildbereich an, sodass  $x \notin \text{Bild}(f_i)$  gilt.

Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.

- b) Seien  $A, B$  und  $C$  beliebige Mengen und  $f : A \rightarrow B$  sowie  $g : B \rightarrow C$  beliebige Funktionen. Wir definieren die Funktion  $h : A \rightarrow C$  als die *Verkettung* von  $f$  und  $g$  durch

$$h(a) := g(f(a)) \quad \text{f.a. } a \in A.$$

- i) Zeigen Sie: Wenn  $f$  und  $g$  injektiv sind, dann ist  $h$  injektiv.  
 ii) Widerlegen Sie: Wenn  $h$  surjektiv ist, dann sind  $f$  und  $g$  surjektiv.

**Bitte wenden!**

## Aufgabe 2.4 Relationale Datenbanken

((3+3+7) + (6+6) = 25 Punkte)

In dieser Aufgabe modellieren wir die *relationale Datenbank* eines einfachen sozialen Netzwerks, in dem Personen Textnachrichten erstellen („to create“), liken („to like“) und teilen („to share“) können. Dabei werden *Datensätze* als Zeilen von Tabellen gespeichert, die mithilfe der Sprache *SQL* abgefragt werden können. Formal handelt es sich bei den Tabellen um Relationen und bei den Datensätzen um alle Tupel, die zur Relation gehören. Mit *Operatoren* können Datensätze miteinander kombiniert und Informationen extrahiert werden.

**Definition.** Für ein Tupel  $x := (x_1, \dots, x_n)$  bezeichne  $x_i$  die  $i$ -te Komponente von  $x$ . Für eine Teilmenge  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  entsteht das Tupel  $(x_i : i \in I)$  aus  $x$ , indem alle Komponenten  $x_j$  mit  $j \notin I$  gelöscht werden.

Seien  $R_1, R_2$  und  $R_3$  Relationen mit Stelligkeiten  $k, \ell$  bzw.  $\ell$ . Wir betrachten folgende *Operatoren*:

$$\begin{aligned}
 S_E(R_1) &:= \{x \in R_1 : E(x) \text{ ist wahr}\} \subseteq R_1 && \text{„Selektion nach Eigenschaft } E\text{“} \\
 R_1 \otimes R_2 &:= \{(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+\ell}) : && \text{„Kartesisches Produkt“}^1 \\
 &\quad (x_1, \dots, x_k) \in R_1 \text{ und } (x_{k+1}, \dots, x_{k+\ell}) \in R_2\} \\
 R_2 \cup R_3 &:= \{x : x \in R_2 \text{ oder } x \in R_3\} && \text{„Vereinigung“} \\
 \pi_I(R_1) &:= \{(x_i : i \in I) : x \in R_1\} && \text{„Projektion auf } I \subseteq \{1, \dots, k\}\text{“}
 \end{aligned}$$

In dieser Aufgabe sind keine Begründungen nötig.

- a) Die Relationen *Person*, *Nachricht* und *Interaktion* sind unten gegeben. Bestimmen Sie die Relationen, die durch die folgenden *Ausdrücke* gegeben sind, in extensionaler Notation.

- i)  $S_{x_3=\text{like}}(\text{Interaktion})$
- ii)  $\pi_{\{1\}}(\text{Person} \cup \text{Interaktion})$
- iii)  $\pi_{\{6,8\}}(S_{x_1=x_4 \text{ und } x_5=x_7 \text{ und } x_1=1}((\text{Person} \otimes \text{Interaktion}) \otimes \text{Nachricht}))$

- b) i) Geben Sie einen Ausdruck (wie in a)) an, der die folgende Relation beschreibt:

$$R := \{(\text{johnborison}, \#beowulf), (\text{sonnenthalbarbier}, \text{Ich rasiere.})\}$$

- ii) Geben Sie einen Ausdruck (wie in a)) an, der die Relation der von Person

$$p \in \{\text{admin}, \text{johnborison}, \text{Crurdulp}, \text{sonnenthalbarbier}\}$$

geteilten Nachrichten mit ihrer ID und ihrem Text beschreibt.

*Kommentar:* In *SQL* werden die Operatoren  $S$ ,  $\otimes$ ,  $\cup$  und  $\pi$  durch die Schlüsselwörter *WHERE* (*Selektion*), *FROM* (*kartesisches Produkt*), *UNION* (*Vereinigung*) und *SELECT* (*Projektion*) dargestellt.

**Relation „Person“**

1: P_ID	2: P_Name	3: P_Beschreibung
1	admin	I'm the boss!
2	johnborison	#beowulf
3	Crurdulp	Lieblingsfarbe: koboldblau
4	sonnenthalbarbier	Ich rasiere.

**Relation „Interaktion“**

1: P_ID	2: N_ID	3: Aktion
1	1	create
1	1	like
1	2	create
2	3	create
2	4	create
3	3	share
3	5	create
4	1	like
4	1	share
4	5	like
4	6	create

**Relation „Nachricht“**

1: N_ID	2: N_Text
1	http://tinygu.de/sos303313
2	Hwæt! We Gardena in geardagum
3	Romanes eunt domus.
4	Romani ite domum.
5	Braganzir lügt.
6	BITTE BITTE BITTE!

<sup>1</sup>Wir haben hier ein anderes Symbol für das kartesische Produkt  $\otimes$  verwendet. Beachten Sie den formalen Unterschied:  $R_1 \times R_2 = \{((x_1, \dots, x_k), (x_{k+1}, \dots, x_{k+\ell})) : (x_1, \dots, x_k) \in R_1 \text{ und } (x_{k+1}, \dots, x_{k+\ell}) \in R_2\} \neq R_1 \otimes R_2$ .