Diskrete Modellierung

Wintersemester 2019/20

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 3

Ausgabe: 31.10.2019
Abgabe: 07.11.2019

Aufgabe 3.1 *DisMord in Whitechapel* $(19 + 2 + 7 = 28$ Punkte)

In einer bitterkalten Nacht Anfang April des Jahres 1888 werden die Anwohner der Olson Street durch einen markerschütternden Schrei geweckt. Der umgehend herbeigeeilte Inspektor Abberline von Scotland Yard findet in einer dunklen Ecke den leblosen Körper einer jungen Frau. Sofort ist ihm klar, dass es sich um kaltblütigen Mord handeln muss. Schnell lässt sich der Kreis der Verdächtigen auf vier Personen aus der unmittelbaren Nachbarschaft reduzieren: der Metzger, der Kutscher, der Barbier und der Arzt.

Noch ist unklar, wer die Tat begangen hat. Oder sind sogar mehrere Personen in den Mord verstrickt? Der Inspektor beginnt sogleich mit seinen Ermittlungen und fördert folgende Fakten zu Tage.

1) Ein Anwohner berichtet, dass sich der Metzger und der Kutscher auf den Tod nicht ausstehen können. Es ist also völlig ausgeschlossen, dass beide zusammen am Mord beteiligt gewesen sind.
2) Der Kutscher gibt zu Protokoll, dass er zur Tatzeit den Arzt in dessen Laboratorium beim Herstellen von Salben beobachtet habe. Falls der Kutscher unschuldig ist – und seine Aussage somit glaubwürdig ist –, muss auch der Arzt unschuldig sein.
3) Sowohl der Barbier als auch der Metzger geben an, die Nacht im nahegelegenen Pub durchzecht zu haben. Doch der Wirt des Pubs widerspricht: Er hatte nur einen einzigen Gast in der Nacht, ist sich aber unsicher, welcher der beiden es war. Entweder der Barbier lügt und ist schuldig oder der Metzger lügt und ist schuldig – während der jeweils andere unschuldig ist.
4) Der Kutscher behauptet, er habe gesehen, dass der Barbier die Tat begangen habe. Diese Aussage könnte gelogen sein – aber nur wenn er selbst schuldig wäre, würde der Kutscher den Inspektor belügen.
5) Am Tatort sind blutige Schuhabdrücke zweier Paar Stiefel gefunden worden; es müssen also mindestens zwei Personen am Mord beteiligt sein. Der eine Abdruck passt nur zum Kutscher oder zum Metzger, die andere muss zum Metzger, zum Barbieren oder zum Arzt gehören.

Lösen Sie den Fall!

a) Stellen Sie aussagenlogische Formeln $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ auf, die die ermittelten Fakten widerspiegeln. Verwenden Sie die Variablen **A** (= „der Arzt ist schuldig"), **K** (= „der Kutscher ist schuldig"), **M** (= „der Metzger ist schuldig") und **B** (= „der Barbier ist schuldig").
b) Konstruieren Sie eine Formel φ, die ausdrückt, dass alle fünf Fakten gelten.
c) Bestimmen Sie alle erfüllenden Belegungen von φ. Kann der Mord anhand der ermittelten Fakten vollständig aufgeklärt werden? Oder können zumindest manche der Verdächtigen definitiv als schuldig bzw. unschuldig identifiziert werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Überprüfen Sie am Ende, ob Ihre Antwort wirklich plausibel ist. Schließlich wollen Sie wohl kaum Unschuldige verurteilen oder Mörder frei herumlaufen lassen!

Bitte wenden!

Aufgabe 3.2 *Erfüllbarkeit, Tautologien, Widersprüche* (12 + 16 = 28 Punkte)

a) Geben Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln φ_i an, ob sie

- allgemeingültig,
- unerfüllbar oder
- sowohl erfüllbar als auch falsifizierbar

ist. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort, z. B. durch Angabe einer Wahrheitstafel oder einer falsifizierenden und einer erfüllenden Belegung oder durch eine direkte Argumentation.

i) $\varphi_1 := \neg X \vee (Z \to X)$

ii) $\varphi_2 := (A \to B) \wedge (B \to C) \wedge (C \to D) \wedge (D \to A)$

iii) $\varphi_3 := \left(\bigvee_{i=1}^{10} V_i\right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{10} \neg V_i\right)$

b) Bestimmen Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln ψ_i die Menge aller erfüllenden Belegungen $\mathcal{B}$ mit $\mathrm{Def}(\mathcal{B}) = \mathrm{Var}(\psi_i)$.

i) $\psi_1 := (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$

ii) $\psi_2 := \bigwedge_{i=1}^{37} (V_i \to V_{i-1})$

iii) $\psi_3 := \bigoplus_{i=1}^{n} V_i = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$, wobei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ist.

Hinweis zu Teil iii): Schauen Sie sich beispielhaft für kleine Werte von n an, wie die erfüllenden Belegungen aussehen, und versuchen Sie das Ergebnis für allgemeine $n \in \mathbb{N}_{>0}$ zu verallgemeinern. Sie dürfen SymPy als Hilfsmittel benutzen. Sie müssen Ihre Antwort nicht beweisen.

Aufgabe 3.3 *Semantische Folgerungen* (5 + 5 + 5 = 15 Punkte)

Seien φ, ψ und χ beliebige aussagenlogische Formeln. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) $\varphi \models \psi$ oder $\psi \models \varphi$.

b) Wenn $(\varphi \vee \psi) \models \mathbf{0}$, dann $(\varphi \wedge \psi) \equiv \mathbf{0}$.

c) $\big(\varphi \to (\psi \to \chi)\big) \models \big((\varphi \to \psi) \to \chi\big)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3.4 *RAID-Systeme und Paritätsbits* $((3+3+8)+15 = 29$ Punkte$)$

Wenn ein Massenspeicher (z. B. eine Festplatte oder SSD) ausfällt, besteht die Gefahr, dass alle auf ihm gespeicherten Bits unwiederbringlich verloren gehen. Eine Möglichkeit solchen Hardwareausfällen im laufenden Betrieb zu begegnen, ist ein *RAID*-System (redundant array of independent disks). Dabei werden mehrere Massenspeicher mittels eines RAID-Controllers zusammengeschaltet. Wir modellieren in dieser Aufgabe RAID-Systeme in vereinfachter Form.

a) Wenn ein oder mehrere Massenspeicher eines RAID-Systems ausfallen, ist das RAID-System von einem Datenverlust betroffen. Geben Sie aussagenlogische Formeln φ_0, φ_1 und φ_5 an, die beschreiben, wann ein RAID-0-, RAID-1- bzw. RAID-5-System von einem Datenverlust betroffen sind. Verwenden Sie hierfür Variablen $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$ mit der Bedeutung „Der Massenspeicher M_1 (bzw. $M_2, \ldots, M_{n+1}$) fällt aus“.

   i) RAID-0: „Mindestens einer der beiden Massenspeicher M_1 und M_2 fällt aus.“

   ii) RAID-1: „Beide Massenspeicher M_1 und M_2 fallen aus.“

   iii) RAID-5: „Mindestens zwei der Massenspeicher $M_1, \ldots, M_{n+1}$ fallen aus.“

Im Folgenden untersuchen wir, wie die Ausfallsicherheit von RAID-5-Systemen bei einem defekten Massenspeicher gewährleistet wird. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $n+1$ die Anzahl der vom RAID-Controller zusammengeschalteten Massenspeicher (siehe Abbildung 1). In Schicht i befinden sich dabei die Bits $X_{i,1}, \ldots, X_{i,n}$ sowie ein zusätzliches *Paritätsbit* P_i.

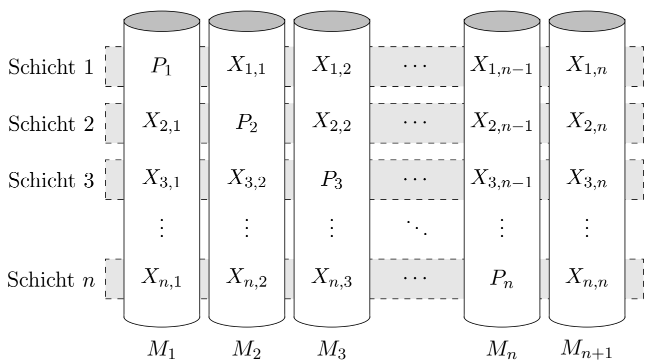

Abbildung 1: Ein RAID-5-System mit $n+1$ Massenspeichern und n Schichten.

Wir bezeichnen den Zustand des RAID-5-Systems als *konsistent*, wenn die in den Massenspeichern gespeicherten Bits einer Belegung $\mathcal{B}$ entsprechen, die die Formel

$$\kappa := \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\left(\bigoplus_{j=1}^{n} X_{i,j} \right) \leftrightarrow P_i \right)$$

erfüllt, d. h. wenn $[\![\kappa]\!]^{\mathcal{B}} = 1$ gilt.

b) Sei das RAID-5-System in einem konsistenten Zustand (gemäß einer Belegung $\mathcal{B}$) und sei $j \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ beliebig. Nun fällt der Massenspeicher M_j aus, d. h. falls $j \leq n$, dann geht die Belegung der Bits $X_{1,j-1}, X_{2,j-1}, \ldots, X_{j-1,j-1}, P_j, X_{j+1,j}, \ldots, X_{n,j}$ verloren, und falls $j = n+1$, dann geht die Belegung der Bits $X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{n,n}$ verloren[1]. Die übrigen Massenspeicher sind weiterhin intakt.

   Wie können die in M_j gespeicherten Bits wiederhergestellt werden?

   Hinweis: Nutzen Sie Ihr Wissen aus der Aufgabe 3.2 b)iii). Unterscheiden Sie die beiden Fälle $j \leq n$ bzw. $j = n+1$.

[1] In einer früheren Version des Aufgabenblattes wurden an dieser Stelle die falschen Bits aufgelistet. Dieser Indexfehler ist nun korrigiert (Stand: 12.11.2019).