

Übungsblatt 4

Ausgabe: 07.11.19
Abgabe: 14.11.19, 7:59 Uhr

Verwenden Sie für Aufgabe 4.4 die Python-Bibliothek SymPy, die unter <http://live.sympy.org/> als Webanwendung abrufbar ist. Alternativ können Sie auch Jupyter Notebook (<https://try.jupyter.org/>) verwenden. Machen Sie sich mithilfe der Bemerkungen 3.27 und 3.33 im Skript mit SymPy vertraut.

Aufgabe 4.1 *Semantische Folgerung und Äquivalenz* (5 + (5 + 5) = 15 Punkte)

- a) Seien φ , ψ und χ aussagenlogische Formeln. Zeigen Sie das folgende Distributivgesetz:

$$\varphi \wedge (\psi \oplus \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \oplus (\varphi \wedge \chi)$$

- b) Seien α und β aussagenlogische Formeln und sei X eine aussagenlogische Variable.

- i) Zeigen oder widerlegen Sie: $((\alpha \vee X) \wedge (\beta \vee \neg X)) \models \alpha \vee \beta$
- ii) Zeigen oder widerlegen Sie: $((\alpha \vee X) \wedge (\beta \vee \neg X)) \equiv \alpha \vee \beta$

Aufgabe 4.2 *Normalformen* (15 + 8 + 2 = 25 Punkte)

- a) Gegeben sei die Formel $\psi := ((A \wedge B) \oplus C) \vee (A \wedge \neg B)$

- i) Geben Sie eine zu ψ äquivalente Formel κ in KNF an.
- ii) Geben Sie eine zu $\neg\psi$ äquivalente Formel δ in DNF an.
- iii) Geben Sie eine zu ψ äquivalente Formel δ' in DNF an.

- b) i) Geben Sie eine zu $\varphi := (X_1 \leftrightarrow X_2) \wedge (X_2 \leftrightarrow X_3)$ äquivalente Formel φ' in DNF an.
ii) Geben Sie eine zu $\chi := X_1 \rightarrow (X_2 \rightarrow (X_3 \rightarrow X_4))$ äquivalente Formel χ' in KNF an.

Hinweis: Nutzen Sie Satz 3.34 im Skript.

- c) Geben Sie eine zu $\sigma := \mathbf{0}$ äquivalente Formel σ' in DNF an.

Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen.

Bitte wenden!

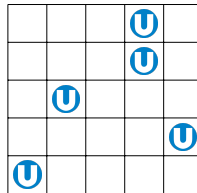
Aufgabe 4.3 *KNF-Modellierung: U-Bahnen und E-Scooter* (5 + (5×5) + 5 = 35 Punkte)

Im neuen Mobilitätskonzept der Deutschen Bahn sollen in Großstädten flächendeckend Stationen zum Ausleihen und Aufladen von E-Scootern (kurz *Scooter*) eingerichtet werden. Um die größtmögliche Kundenzufriedenheit zu erreichen, sollen sich die Stationen nah an den U-Bahn-Haltestellen befinden und möglichst gleichmäßig über die Stadt verteilt sein.

Wir modellieren die Stadt als Gitter $G := \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ bestehend aus n Zeilen und n Spalten, mit insgesamt n^2 Zellen. Eine Menge $U\text{-BAHN} \subseteq G$ der U-Bahn-Haltestellen sei gegeben. Bei der Platzierung der Scooter-Stationen müssen folgende Regeln eingehalten werden:

1. Eine Scooter-Station kann nur dort platziert werden, wo keine U-Bahn-Haltestelle ist.
2. Eine Scooter-Station muss horizontal oder vertikal an eine U-Bahn-Haltestelle angrenzen.
3. Scooter-Stationen dürfen nicht horizontal, nicht vertikal und nicht diagonal benachbart sein.
4. In jeder Zeile muss *mindestens* eine Scooter-Station stehen.
5. In jeder Spalte darf *höchstens* eine Scooter-Station stehen.

- a) Platzieren Sie auf dem folgenden 5×5-Gitter fünf Scooter-Stationen gemäß den Regeln.
(Eine Begründung ist nicht erforderlich.)



Verwenden Sie im Folgenden für alle $(i, j) \in G$ die Variablen $S_{i,j}$ mit der Bedeutung „in Zelle (i, j) (in Zeile i und Spalte j) befindet sich eine Scooter-Station“ und die Variablen $U_{i,j}$ mit der Bedeutung „in Zelle (i, j) befindet sich eine U-Bahn-Haltestelle“. Sei $U\text{-BAHN} \subseteq G$ beliebig. Mit der Formel

$$\varphi_{U\text{Bahn}} := \bigwedge_{(i,j) \in U\text{-BAHN}} U_{i,j} \wedge \bigwedge_{(i,j) \in G \setminus U\text{-BAHN}} \neg U_{i,j}$$

garantieren wir, dass die Variablen $U_{i,j}$ genau dann mit 1 belegt sind, wenn sich in der Zelle (i, j) eine U-Bahn-Haltestelle befindet.

- b) Im Folgenden sollen Formeln erstellt werden, welche die korrekte Platzierung der Scooter-Stationen (für allgemeines n) sicherstellen. Erläutern Sie auch jeweils kurz die **Idee**, die Ihrer Formel zugrunde liegt. Gehen Sie analog zur KNF-Modellierung des Sudoku-Spiels (Beispiel 3.48 im Skript) vor.

- i) Geben Sie eine Formel φ_1 an, die Regel 1 formalisiert.

Die Formel φ_1 besagt also für jede Zelle $(i, j) \in G$: „Wenn eine U-Bahn-Haltestelle in Zelle (i, j) steht, dann steht dort keine Scooter-Station.“

- ii) Geben Sie eine Formel φ_2 an, die Regel 2 formalisiert.

Hinweis: Für jede Zelle $(i, j) \in G$ ist $HV(i, j) := \{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)\} \cap G$ die Menge aller an (i, j) horizontal oder vertikal angrenzenden Zellen auf dem Gitter G . Nutzen Sie die Mengen $HV(1, 1), HV(1, 2), \dots, HV(n, n)$ für Ihre Formel φ_2 .

- iii) Geben Sie eine Formel φ_3 an, die Regel 3 formalisiert.

Hinweis: Definieren Sie analog zu ii) geeignete Mengen $HVD(i, j)$ aller horizontal, vertikal oder diagonal angrenzenden Zellen.

- iv) Geben Sie eine Formel φ_4 an, die Regel 4 formalisiert.

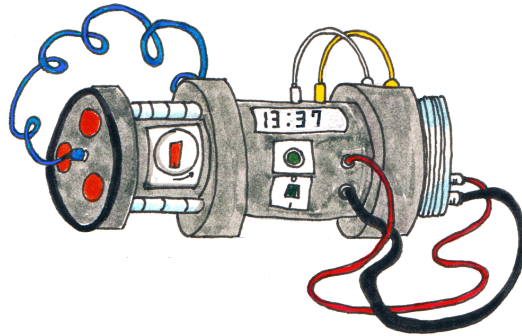
- v) Geben Sie eine Formel φ_5 an, die Regel 5 formalisiert.

Hinweis: Notationen wie $\bigwedge_{i=1}^n \dots$ oder $\bigwedge_{(i,j) \in M} \dots$ (für eine Menge M) oder $\bigwedge_{(i,j) \in G} \bigvee_{(i',j') \in HV(i,j)} \dots$ sind hier hilfreich.

- c) Geben Sie eine Formel φ in KNF an, sodass die erfüllenden Belegungen genau den legalen Platzierungen von U-Bahn-Haltestellen und Scooter-Stationen entsprechen.

Aufgabe 4.4 *Modellierung und SymPy: Bombenentschärfung* (8 + 8 + 2 + 7 = 25 Punkte)

Auf dem Heimweg finden Sie eine Bombe, die in 13 Minuten und 37 Sekunden¹ explodiert. Laufen Sie nicht weg! Entschärfen Sie die Bombe!



Die Bombe hat fünf Drähte – einen blauen, einen gelben, einen roten, einen schwarzen und einen weißen –, sowie drei Schalter: einen Dreh-, einen Kipp- und einen Tastschalter. In Ihrer [Bombenentschärfungsanleitung](#) finden Sie folgende acht Instruktionen zum Entschärfen der Bombe:

- A: Falls Sie den gelben Draht durchtrennen, müssen Sie auch den blauen und den roten Draht durchtrennen.
- B: Durchtrennen Sie den roten Draht genau dann, wenn Sie weder den Dreh- noch den Tastschalter betätigen.
- C: Sie müssen entweder den Kippschalter betätigen oder sowohl den weißen als auch den blauen Draht durchtrennen.
- D: Nur wenn Sie den schwarzen Draht intakt lassen, dürfen Sie den Kipp- oder den Tastschalter betätigen.
- E: Betätigen Sie genau zwei der drei Schalter.
- F: Sie dürfen nicht den gelben, blauen und weißen Draht zusammen durchtrennen.
- G: Sie dürfen den weißen Draht nur dann intakt lassen, wenn Sie den schwarzen Draht durchtrennen – und umgekehrt.
- H: Durchtrennen Sie eine gerade Anzahl von Drähten.

Mit Schweißtropfen auf der Stirn hocken Sie vor der Bombe und versuchen, aus den Instruktionen schlau zu werden. Welche Drähte sind denn nun zu durchtrennen und welche Schalter zu betätigen? Glücklicherweise beherrschen Sie Aussagenlogik und haben einen Computer zur Hand.

Benutzen Sie die Variablen b, g, r, s, w mit den Bedeutungen „Der **blaue** (bzw. **gelbe**, **rote**, **schwarze**, **weiße**) Draht muss durchtrennt werden“, und die Variablen d, k, t mit den Bedeutungen „Der **Dreh**-schalter (bzw. **Kipp**-schalter, **Tast**-schalter) muss betätigt werden“.

- a) Formalisieren Sie die Instruktionen A bis H durch Formeln $\varphi_A, \dots, \varphi_H$.
- b) Definieren Sie SymPy-Variablen $\mathbf{b}, \mathbf{g}, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{w}, \mathbf{d}, \mathbf{k}, \mathbf{t}$. Übersetzen Sie dann die obigen Formeln in SymPy-Formeln $\mathbf{phia}, \mathbf{phib}, \dots, \mathbf{phih}$.
- c) Stellen Sie eine SymPy-Formel \mathbf{xi} auf, sodass die erfüllenden Belegungen widerspiegeln, was zu tun ist, um die Bombe zu entschärfen.
- d) Wie gehen Sie vor, um die Bombe zu entschärfen? Welche Drähte trennen Sie durch, welche lassen Sie intakt? Welche Schalter betätigen Sie?

Hinweis: Wenn Sie alles richtig gemacht haben, besitzt \mathbf{xi} genau eine erfüllende Belegung.

Begründungen sind nicht erforderlich, geben Sie aber in Teil b) bis d) Ihren SymPy-Quelltext in ausgedruckter Form ab.

¹36, 35, 34, 33, 32, 31, ... Los, Beeilung!