Diskrete Modellierung

Wintersemester 2019/20

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

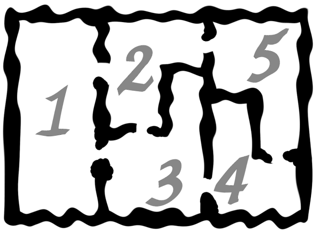
Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 11

Ausgabe: 16.01.20
Abgabe: 23.01.20

Aufgabe 11.1 *Irrfahrten auf ungerichteten Graphen* $(5 + 5 + (5{+}5{+}5) = 25$ Punkte)

Um Ihre geräumige Fünf-Zimmer-Wohnung im Frankfurter Westend sauber zu halten, haben Sie sich bei einem großen Versandhändler einen intelligenten Staubsauger gekauft. Wenn er nicht gerade an der Ladestation verweilt, fährt er zufällig durch die Räume Ihrer Wohnung und säubert sie.



Schon nach kurzer Zeit stellen Sie fest, wieso der Staubsauger so günstig war. Die aufgesaugten Krümel und Staubreste werden analysiert und aus dem eingebauten Lautsprecher des Staubsaugers ertönen die auf den Analysedaten basierenden Kaufempfehlungen: „Ich habe Schokoladenkuchen detektiert. PING PING PING. Kaufen Sie jetzt zwei Kuchen zum Preis von einem!“

Da diese Kaufempfehlungen Ihren Schlaf stören, Sie aber auch nicht auf die saubere Wohnung verzichten wollen, möchten Sie Ihren Schlafplatz in einen Raum verlegen, in dem Ihr Staubsauger möglichst selten auftaucht. Sie wissen, dass er einen Raum nach erfolgter Säuberung mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit durch je eine der Türen des Raums wieder verlässt.

a) Modellieren Sie die Situation durch eine Markov-Kette (G, P) auf den Zuständen $1, \ldots, 5$: Zustand i drückt aus, dass der Staubsauger in Raum i auftaucht. Es genügt, wenn Sie G in grafischer Darstellung angeben und die Kanten mit den Übergangswahrscheinlichkeiten beschriften.

b) Bestimmen Sie für jeden Raum die Wahrscheinlichkeit, dass der Staubsauger dort auftaucht. *Hinweis*: Nutzen Sie das Resultat aus der Vorlesung über Irrfahrten auf ungerichteten Graphen.

c) Seit der Staubsauger einmal einen verdächtigen Krümel in Raum 1 aufsaugte und sicherheitshalber die Polizei kontaktierte, halten Sie die beiden Türen dieses Raums stets geschlossen und lassen nur noch in den Räumen 2, 3, 4 und 5 saugen. Nun können Sie in Raum 1 ungestört schlafen, während die anderen Räume mit Werbung beschallt werden[1].
Sei (G', Q) die so entstandene Markov-Kette mit den Zuständen 2, 3, 4 und 5.
   i) Hat (G', Q) eine Grenzverteilung?
   ii) Wie viele stationäre Verteilungen hat (G', Q)?
   iii) Und wie viele stationäre Verteilungen hat die Markov-Kette mit der Übergangsmatrix Q^2?

Bitte wenden!

[1] „Klatschen Sie jetzt einmal in die Hände, um die 1-Clap-Buy-Funktion zu aktivieren!“

Aufgabe 11.2 *Spiel und Spaß im halbautomatischen Labor* $(15 + (3 + 3 + 4) = 25$ Punkte)

In Ihrem Labor stehen in einer Reihe drei Gefäße mit Fassungsvermögen 4 Hektoliter, 3 Hektoliter bzw. 7 Hektoliter. Oberhalb der Gefäße befindet sich ein Roboter mit großen Greifarmen, den Sie mit zwei Hebeln steuern können:

- Ziehen Sie den rechten Hebel R, so greift der Roboter das rechte Gefäß und gießt dessen Inhalt Gefäß in das in der Mitte, solange bis das rechte Gefäß leer oder das Gefäß in der Mitte voll ist.
- Ziehen Sie den linken Hebel L, so greift der Roboter das linke Gefäß und gießt dessen Inhalt in das Gefäß in der Mitte, solange bis das linke Gefäß leer oder das in der Mitte voll ist. Anschließend vertauscht der Roboter die drei Gefäße zyklisch: Das linke Gefäß kommt nach rechts, das mittlere nach links und das rechte in die Mitte.

Anfangs steht das 4-Hektoliter-Gefäß links, das 3-Hektoliter-Gefäß in der Mitte und das 7-Hektoliter-Gefäß rechts. Die ersten beiden sind bis zum Rand gefüllt, während das 7-Hektoliter-Gefäß leer ist.

a) Modellieren Sie das System durch einen DFA. Benutzen Sie das Alphabet $\Sigma = \{L, R\}$ und die Zustandsmenge

$$\left\{ \begin{smallmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{smallmatrix} \;:\; a, b, c \in \{0, \ldots, 7\}, \{x, z, y\} = \{3, 4, 7\} \right\}$$

wobei der Zustand $\begin{smallmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{smallmatrix}$ ausdrückt, dass die Gefäße in der Reihenfolge x, y, z (von links nach rechts) stehen und die Füllstände a, b, c (v. l. n. r.) betragen. Berücksichtigen Sie nur solche Zustände, die vom Startzustand aus erreichbar sind! Sie brauchen keine akzeptierenden Zustände zu spezifizieren. Stellen Sie Ihren DFA grafisch dar, wählen Sie dabei eine möglichst übersichtliche Darstellung ohne überkreuzende Kanten.

b) Beantworten Sie die folgenden Fragen basierend auf Ihrer Modellierung.

i) Während Sie in der Mittagspause waren, hat Ihr Kollege spaßeshalber die Hebel L, L, L, R, L (in dieser Reihenfolge) gezogen. In welchem Zustand befindet sich das System nun? Welche Hebel(folge) müssen Sie betätigen, um den Startzustand wiederherzustellen – sofern das überhaupt möglich ist?

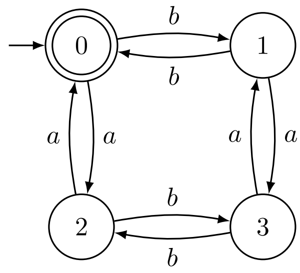
ii) Für Ihr Rezept müssen Sie genau sechs Hektoliter abmessen. Welche Hebelfolge ist zu betätigen, um das 7-Hektoliter-Gefäß mit genau sechs Hektoliter zu füllen?

iii) Bevor Sie die Hebel für Ihr Rezept (aus Teil ii) betätigen können, meldet die Systemdiagnose eine Fehlfunktion: Immer wenn Sie einen der Hebel L oder R betätigen, wird die Aktion des jeweils anderen Hebels direkt danach ebenfalls ausgeführt. Können Sie dennoch Ihr Rezept vollenden?

Bitte wenden!

Aufgabe 11.3 *DFAs lesen und DFAs konstruieren* $(8 + (9 + 9) = 26$ Punkte)

a) Betrachten Sie den folgenden DFA A:



Beschreiben Sie die Sprache $L(A)$ mathematisch oder umgangssprachlich.

b) Geben Sie für die beiden folgenden Sprachen L_1 und L_2 jeweils einen DFA mit möglichst wenigen Zuständen an, der die jeweilige Sprache akzeptiert.

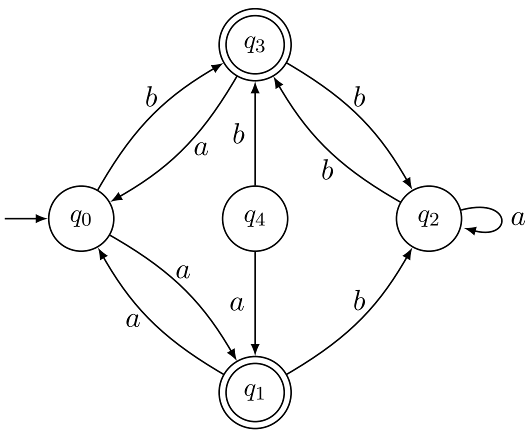
i) $L_1 := \{w \in \{a,b\}^* : w \text{ enthält das Teilwort } abbab\}$

ii) $L_2 := \{w \in \{a,b\}^* : \text{der erste und der letzte Buchstabe von } w \text{ sind identisch}\}$

In dieser Aufgabe sind keine Begründungen notwendig.

Aufgabe 11.4 *Verschmelzungsrelation* $((4+4+4) + (6+6) = 24$ Punkte)

a) Betrachten Sie den folgenden DFA A über $\Sigma = \{a, b\}$.



i) Weisen Sie die folgenden Inäquivalenzen bzgl. der Verschmelzungsrelation $\equiv_A$ nach, indem Sie geeignete Zeugen angeben.

- $q_0 \not\equiv_A q_3$
- $q_0 \not\equiv_A q_2$

ii) Gibt es in A zwei verschiedene Zustände q_i und q_j mit $q_i \equiv_A q_j$?

iii) Ohne Begründung: Geben Sie alle Äquivalenzklassen der Verschmelzungsrelation $\equiv_A$ an.

b) Sei $A := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein DFA und seien $p, q \in F$ beliebige akzeptierende Zustände.

Zeigen oder widerlegen Sie:

i) Wenn $\delta(p, a) = \delta(q, a)$ für alle $a \in \Sigma$, dann $p \equiv_A q$.

ii) Wenn $\delta(p, a) \neq \delta(q, a)$ für ein $a \in \Sigma$, dann $p \not\equiv_A q$.