# Die Auswahl von Experten

- $n$ Experten geben in mehreren Runden Ja/Nein Empfehlungen (wie etwa Kauf oder Verkauf einer Aktie) ab.
- Nach jeder Runde wird mitgeteilt, welche Empfehlung richtig ist.
- Können wir einen Algorithmus entwickeln, dessen Anzahl an Fehlentscheidungen nur unwesentlich größer ist als die des besten Experten?

Warum nicht einfach in jeder Runde den bisher besten Experten wählen?

(1) Konstruiere eine Menge von $n$ Experten, so dass sich diese Strategie immer irrt, obwohl der beste Experte nach $t$ Runden höchstens $t/n$ Fehler macht.

(2) Katastrophale Strategie: Keine einzige richtige Entscheidung, obwohl die Experten nur mit Wahrscheinlichkeiten $1/n$ irren.

# Der weighted Majority Ansatz

(1) Setze $w_i = 1$ für alle Experten $i$.
/* Zu Anfang besitzen allen Experten dasselbe Gewicht. */

(2) Wenn Experte $i$ die Empfehlung $x_i \in \{\mathrm{Ja}, \mathrm{Nein}\}$ abgibt, dann treffe die Entscheidung „Ja“, falls

$$\sum_{i, x_i = \mathrm{Ja}} w_i \geq \sum_{i, x_i = \mathrm{Nein}} w_i$$

und ansonsten treffe die Entscheidung „Nein“.
/* Wir folgen der Mehrheit. */

(3) Wenn Experte $i$ eine falsche Empfehlung abgegeben hat, dann setze $w_i = w_i/2$. Ansonsten bleiben die Gewichte unverändert.
/* „Heftige“ Bestrafung falscher Entscheidungen */

# Analyse

(1) Sei $W_t$ das Gesamtgewicht aller Experten vor Beginn von Runde $t$. Dann ist anfänglich $W_1 = n$.

(2) Wenn die Entscheidung in Runde $t$ falsch ist, dann haben sich Experten mit einem Gesamtgewicht von mindestens $W_t/2$ geirrt:

$$W_{t+1} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{W_t}{2} + \frac{W_t}{2} = \frac{3}{4} W_t.$$

(3) Wenn wir $f$ falsche Entscheidungen bis zum Zeitpunkt $t$ treffen, ist $W_t \leq n \cdot (\frac{3}{4})^f$.

(4) Wenn der beste Experte $i$ bis zum Zeitpunkt $t$ genau $f_{\text{opt}}$ Fehler gemacht hat, dann ist $w_i = 2^{-f_{\text{opt}}}$ und als Konsequenz

$$(\frac{1}{2})^{f_{\text{opt}}} \leq W_t \leq n \cdot (\frac{3}{4})^f, \text{ bzw } (\frac{4}{3})^f \leq 2^{f_{\text{opt}}} \cdot n.$$

# Das Resultat

Da $(\frac{4}{3})^f \leq 2^{f_{\text{opt}}} \cdot n$:

Wenn der Weighted Majority Algorithmus bei $n$ Experten bisher $f$ falsche und der beste Experte $f_{\text{opt}}$ falsche Entscheidungen getroffen haben, dann gilt

$$f \leq \frac{1}{\log_2(4/3)} \cdot (f_{\text{opt}} + \log_2 n).$$

(1) Nach logarithmischer „Aufwärmzeit“ erreichen wir die Prognosekraft des besten Experten bis auf den Faktor $\frac{1}{\log_2(4/3)} \approx 2,41$.

(2) Können wir bei entsprechend verlängerter Aufwärmzeit die Prognosekraft des besten Experten fast exakt erreichen?

# Eine randomisierte Version von **Weighted Majority**

## Ein allgemeineres Modell

Die Empfehlung eines Experten *i* zum Zeitpunkt *t* bewerten wir mit einer „Note“ $c_i^t$ auf einer Skala von 0 (sehr gut) bis 1 (sehr schlecht).

Unser Algorithmus:

(1) Setze $w_i = 1$ für alle Experten *i*.

(2) Wähle einen Experten zufällig, wobei Experte *i* die Wahrscheinlichkeit

$$p_i = \frac{w_i}{\sum_{k=1}^{n} w_k}$$

erhält und übernimm seine Entscheidung.

(3) Berechne neue Gewichte: Setze $w_i = w_i(1 - \varepsilon \cdot c_i^t)$.
*Kommentar:* Die von der Rundenzahl *t* unabhängige Konstante $\varepsilon$ wird aus dem Intervall $]0, 1/2[$ gewählt. Beachte $\varepsilon \cdot c_i^t \in [0, 1/2[$.

# Analyse I

(1) $w_i^t$ sei das Gewicht von Experte $i$ zu Beginn von Runde $t$. Die Gewichtssume aller Experten vor Runde $t$ ist $W_t = \sum_{i=1}^{n} w_i^t$.

(2) $K_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i^t}{W_t} \cdot c_i^t$ ist die erwartete Benotung unserer Entscheidung zum Zeitpunkt $t$.

(3) Wie berechnet sich $W_{t+1}$ aus $W_t$?

$$
\begin{aligned}
W_{t+1} &= \sum_{i=1}^{n} w_i^t \cdot (1 - \varepsilon \cdot c_i^t) = \sum_{i=1}^{n} w_i^t - \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} w_i^t \cdot c_i^t \\
&= W_t - \varepsilon \cdot K_t \cdot W_t = W_t \cdot (1 - \varepsilon \cdot K_t)
\end{aligned}
$$

Wir expandieren und erhalten $W_{T+1} = W_1 \cdot \Pi_{t \leq T}(1 - \varepsilon \cdot K_t)$.

# Analyse II

Es ist $W_{T+1} = W_1 \cdot \Pi_{t \leq T}(1 - \varepsilon \cdot K_t)$.

(4) Beachte $\log(1-x) \leq -x$ und

$$\ln W_{T+1} \;=\; \ln W_1 + \sum_{t \leq T} \ln(1 - \varepsilon \cdot K_t) \leq \ln n - \sum_{t \leq T} \varepsilon K_t$$

Eine schlechte erwartete Benotung unserer Entscheidungen drückt das Gesamtgewicht.

(5) Ein Experte mit guter Benotung hingegen stärkt das Gesamtgewicht: Für Experte $i$ gilt

$$W_{T+1} \geq w_i^{T+1} = \Pi_{t \leq T}(1 - \varepsilon \cdot c_i^t).$$

Wir möchten wieder logarithmieren, um unsere erwartete Benotung mit der Benotung eines besten Experten vergleichen zu können: Beachte $\ln(1-x) \geq -x - x^2$ für $x \in [0, 1/2]$.

# Analyse III

Es ist $W_{T+1} \geq w_i^{T+1} = \Pi_{t \leq T}(1 - \varepsilon \cdot c_i^t)$ und
$\ln(1 - x) \geq -x - x^2$ für $x \in [0, 1/2]$.

(6) Nach Logarithmierung folgt wegen $0 \leq c_i^t \leq 1$:

$$\begin{aligned} \ln W_{T+1} &\geq \sum_{t \leq T} \ln(1 - \varepsilon \cdot c_i^t) \geq -\sum_{t \leq T} (\varepsilon \cdot c_i^t + (\varepsilon \cdot c_i^t)^2) \\ &\geq -\sum_{t \leq T} (\varepsilon \cdot c_i^t + \varepsilon^2 \cdot c_i^t) = -(\varepsilon + \varepsilon^2) \cdot \sum_{t \leq T} c_i^t. \end{aligned}$$

(7) Wir vergleichen die untere mit der oberen Gewichtsschranke:

$$-(\varepsilon + \varepsilon^2) \cdot \sum_{t \leq T} c_i^t \leq \ln W_{T+1} \leq \ln n - \sum_{t \leq T} \varepsilon K_t.$$

# Das Ergebnis

- Es ist $-(\varepsilon + \varepsilon^2) \cdot \sum_{t \leq T} c_i^t \leq \ln n - \sum_{t \leq T} \varepsilon K_t$.
- Nach Division durch $\varepsilon$ folgt:

Wenn $\mathrm{K}_{\text{opt}}$ die Gesamtbenotung des besten Experten ist und $K_t$ die erwartete Benotung unserer Entscheidung in Runde $t$ ist, dann folgt

$$\sum_{t \leq T} K_t \leq (1 + \varepsilon) \cdot K_{\text{opt}} + \frac{\ln n}{\varepsilon}.$$

- Wir erreichen die Benotung des besten Experten bis auf den Faktor $1 + \varepsilon$, wenn wir die „Aufwärmzeit“ $\frac{\ln n}{\varepsilon}$ erlauben.

# Constant Rebalanced Portfolio

- Ein Vermögen $V$ wird über $m$ Anlagemöglichkeiten verteilt: Anlage $i$ erhält das Vermögen $p_i \cdot V$.
- Zu jedem Anlagezeitpunkt: Anlage $i$ erhält den Anteil $p_i \cdot V'$, wenn $V'$ das gegenwärtige Vermögen ist.

**CRP: Zwei Aktien mit $p_1 = p_2 = 0.5$**

Wir arbeiten mit zwei Aktien, wobei sich die erste Aktie nicht bewegt, während sich die zweite Aktie stets erst halbiert und dann verdoppelt.

- Das Vermögen sinkt nach einem Anlagezeitpunkt auf $V \cdot (1/2 + (1/2) \cdot (1/2)) = 3 \cdot V/4$
- und steigt nach dem zweiten Anlagezeitpounkt auf $V \cdot (3/8 + 2 \cdot 3/8) = 9 \cdot V/8$.
- Vor dem Anlagetermin $2n + 1$ ist das Vermögen damit exponentiell auf $(\frac{9}{8})^n \cdot V$ angewachsen!

# Der Universal Portfolio Algorithmus

- Welche Verteilung $p$ sollte gewählt werden?
- Risiko-Minimierung:
  Der Universal Portfolio Algorithmus versucht, die erwartete Vermögensentwicklung des CRP-Ansatzes zu erreichen.
  - Wir arbeiten mit einer großen Anzahl $N$ verschiedener Verteilungen.
  - Rebalanciere jedes Portfolio nach seiner Verteilung ohne Gelder zwischen den verschiedenen Portfolios zu transferieren.

## Der Universal Portfolio Algorithmus und Weighted Majority

- Anfänglich erhält jedes ausgewählte Portfolio das Gewicht $\frac{V}{N}$.
- Die Gewichte geben den Erfolg wieder.
- Gewichte werden vom Markt aktualisiert:
  - Der Markt übernimmt die Rolle von Weighted Majority.
  - Diesmal versuchen wir aber nicht die Leistung des besten Experten, sondern nur die durchschnittliche Leistung zu erreichen.

# Wie gut ist der Universal Portfolio Algorithmus?

Wir arbeiten mit $m$ Anlagemöglichkeiten über einem Zeitraum von $n$ Anlageperioden.
$opt_n$ sei das optimale Vermögen und $e_n$ das erwartete Vermögen nach $n$ Anlageperioden. Dann gilt:

$$e_n \geq \frac{\mathrm{opt}_n}{(n+1)^{m-1}}.$$

- Der durchschnittliche relative Verlustfaktor pro Anlageperiode ist höchstens

$$\left((n+1)^{m-1}\right)^{1/n} \approx \left(n^{m-1}\right)^{1/n} = n^{(m-1)/n} = 2^{\frac{(m-1)\cdot \log_2 n}{n}} \approx 1.$$

- Wächst die optimale CRP-Strategie um den Faktor $a_n^n$ für $a_n > 1$, dann wächst das erwartete Vermögen um den Faktor $b_n^n$ mit $b_n > 1$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

# Die Auswahl von Spezialisten

Wir arbeiten mit Spezialisten:

- Jeder Spezialist gibt eine Ja/Nein Empfehlung ab oder enthält sich.
- Unser Ziel: So gut zu sein, wie eine beste Menge $E$ von Spezialisten:
  - Die Menge $E$ erhält für jeden sich irrenden Spezialisten einen Strafpunkt.
  - Enthalten sich alle Spezialisten in $E$ erhält $E$ insgesamt einen Strafpunkt.

Unser Ziel ist sehr ambitioniert, da wir jetzt mit einer besten Menge von Spezialisten mithalten möchten:

> Beste Spezialisten aus verschiedensten Fachgebieten können sehr viel stärker als Experten sein.

# Der Winnow Algorithmus

(1) Setze $w_1 = \cdots = w_n = 1$.

(2) Wenn eine Entscheidung zu treffen ist, dann gibt jeder Spezialist $i$ bekannt, ob er sich enthält ($x_i = 0$) oder nicht ($x_i = 1$).

(2a) Winnow enthält sich, falls

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i < n$$

gilt. Wenn Winnow sich enthält: Verdopple die Gewichte aller Spezialisten, die sich *nicht* enthalten haben.

(2b) Sonst ist $\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i \geq n$ und Winnow trifft eine Mehrheitsentscheidung: Wenn Spezialist $i$ die Empfehlung $y_i \in \{\mathrm{Ja}, \mathrm{Nein}\}$ abgibt, dann entscheidet Winnow auf „Ja“, wenn

$$\sum_{i, x_i=1, y_i=\mathrm{Ja}} w_i \cdot x_i \geq \sum_{i, x_i=1, y_i=\mathrm{Nein}} w_i \cdot x_i$$

und ansonsten auf „Nein“. Die Gewichte aller Spezialisten, die die falsche Entscheidung unterstützt haben, werden halbiert.

# Das Ergebnis

Sei $E$ eine beliebige Teilmenge von insgesamt $n$ Spezialisten. Dann macht Winnow nach $T$ Runden höchstens

$$5 \cdot \mathrm{Strafe}_T(E) + 5 \cdot |E| \cdot \lceil \log_2 n \rceil + 4$$

Fehler, wobei ein Fehler entweder eine Enthaltung oder eine falsche Entscheidung ist.

(1) Unsere Strafpunktzahl ist durch das 5-fache der Strafpunktzahl von $E$ beschränkt: Die Aufwärmzeit $5 \cdot |E| \cdot \lceil \log_2 n \rceil + 4$ wächst mit der Größe von $E$.

(2) To winnow: Den Spreu vom Weizen trennen.

Der Winnow Algorithmus isoliert relativ schnell die erfolgreichen Spezialisten.

# Analyse: Die Enthaltungen von Winnow

- Für $i \in E$ ist $f_i$ die Anzahl falscher Entscheidungen nach $T$ Runden.
- Alle Spezialisten in $E$ enthalten sich in genau $e$ Runden.
- Wie groß ist $e^*$, die Anzahl der Enthaltungen von Winnow?

(1) Winnow enthält sich nicht, wenn sich mindestens ein „Schwergewicht" (mit $w_i \geq n$) nicht enthält.

(2) Jeder Spezialist $i \in E$, der sich mindestens $f_i + \log_2 n$ Mal **nicht** enthält, während sich Winnow jedesmal enthält, wird zu einem Schwergewicht.

   Sein Gewicht, unter Einrechnung der Halbierungen nach Fehlentscheidungen, ist auf $n$ angestiegen.

(3) In $e^* - e$ Enthaltungsschritten von Winnow wird sich aber mindestens ein Spezialist aus $E$ nicht enthalten.

# Analyse: Die Fehlentscheidungen von Winnow

$$\begin{aligned} e^* &\leq e + \sum_{i \in E} f_i + |E| \cdot \lceil \log_2 n \rceil \\ &= \mathrm{Strafe}_T(E) + |E| \cdot \lceil \log_2 n \rceil. \end{aligned}$$

(4) Warum? Wenn $e^*$ größer als die rechte Seite ist, dann blockiert ein Schwergewicht in $E$ eine Enthaltung von Winnow.

(5) Wie groß ist die Anzahl der Fehlentscheidungen von Winnow?
- Sei $W_t$ die Summe aller Gewichte vor Runde $t$.
- Es ist $W_1 = n$ und $W_t > 0$.
- Wenn Winnow sich in Runde $t$ enthält, dann ist $\sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i < n$.

  Nach Verdopplung für Nicht-Enthaltungen ist $W_{t+1} \leq W_t + n$.
- Bei einer Fehlentscheidung von Winnow ist $\sum_{i=1}^n w_i x_i \geq n$. Das Gesamtgewicht der sich irrenden Spezialisten ist mindestens $n/2$.

  Nach Halbierung folgt $W_{t+1} \leq W_t - \frac{n}{4}$.

# Gesamtanalyse

- Es ist $e^* \leq \mathrm{Strafe}_T(E) + |E| \cdot \lceil \log_2 n \rceil$.
- Enthält sich Winnow in Runde $t$, dann ist $W_{t+1} \leq W_t + n$.
- Bei einer Fehlentscheidung von Winnow in Runde $t$ ist $W_{t+1} \leq W_t - \frac{n}{4}$.

(1) Sei $f^*$ die Anzahl der Fehlentscheidungen von Winnow. Dann ist

$$f^* \leq 4e^* + 4.$$

(2) Also ist die Anzahl der Enthaltungen und Fehlentscheidungen von Winnow durch

$$e^* + f^* \leq 5e^* + 4 \leq 5 \cdot \mathrm{Strafe}_T(E) + 5 \cdot |E| \cdot \lceil \log_2 n \rceil + 4$$

beschränkt.