Theoretische Informatik 2

Sommersemester 2017

Georg Schnitger
Philipp Tertel
Hung The Tran

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 1

Ausgabe: 25.04.17
Abgabe: 02.05.17

- Wenn die Aufgabenformulierung nichts anderes besagt, wird stets eine sorgfältige, mathematisch fundierte Begründung der Antwort erwartet.
- Alle Übungsblätter besitzen 24 Punkte als Maximalpunktzahl.

Aufgabe 1.1 *Die Tiefe von DFAs und regulären Sprachen* (2+2+2+2 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir ausschließlich Automaten ohne nicht-erreichbare Zustände. Sei $L = L(A)$ für einen DFA $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$. Definiere die Tiefe von A als die kleinste Zahl i, so dass $\equiv_A^i$ und $\equiv_A^{i+1}$ übereinstimmen.

a) Zeigen Sie, dass die Tiefe eines DFA A mit der Tiefe seines Äquivalenzklassenautomaten übereinstimmt.

   Kommentar: Die Tiefe eines DFAs A hängt also nur von seiner Sprache $L(A)$ ab. Demgemäß wird die Tiefe einer regulären Sprache L durch die Tiefe irgendeines DFA definiert, der L akzeptiert.

b) Zeigen Sie: Eine Sprache L besitzt genau dann die Tiefe 0, wenn L einen DFA mit höchstens zwei Zuständen besitzt.

c) Zeigen Sie, dass es keinen DFA A mit n Zuständen und Tiefe größer als $n - 2$ gibt.

d) Die Sprache L sei regulär. Zeigen Sie, dass die Tiefe von L höchstens $\text{Index}(L) - 2$ beträgt.

Aufgabe 1.2 *Der Algorithmus von Moore* (4+4 Punkte)

a) In der $(i + 1)$-ten Iteration des Algorithmus von Moore sind zuerst die Zerlegungen $Z_i(a)$ der Zustandsmenge Q für jeden Buchstaben $a \in \Sigma$ zu bestimmen und danach die Zerlegung Z_{i+1}.

   i) Zeigen Sie, wie $Z_i(a)$ in Zeit $\mathcal{O}(|Q|)$ bestimmt werden kann, wenn Z_i bekannt ist.

   ii) Zeigen Sie, wie Z_{i+1} in Zeit $\mathcal{O}(|\Sigma| \cdot |Q|)$ bestimmt werden kann, wenn die Zerlegungen $Z_i(a)$ für alle Buchstaben $a \in \Sigma$ bekannt sind.

   Um eine Zerlegung von Q in k Klassen darzustellen, verwenden Sie die Zahlen $0, \ldots, k - 1$ als Klassenkennungen und weisen Sie jedem Zustand die Kennung seiner Klasse zu.

   Hinweis: Radixsort sortiert n natürliche Zahlen $0 \leq a_1, \ldots, a_n \leq n^k - 1$ in Zeit $O(k \cdot n)$.

Bitte wenden!

b) Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und sei $w = w_1 \cdots w_n \in \Sigma^n$. Wir definieren

$$L_w = \{u \in \{a,b\}^* \,:\, w \text{ ist ein Teilwort von } u\}.$$

Sei $A_w = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein DFA mit $Q = \{0, \ldots, n\}$, $q_0 = 0$ und $F = \{n\}$.

i) Definieren Sie die Zustandsüberführungsfunktion δ so, dass $L(A_w) = L_w$ gilt.

ii) Führen Sie den Algorithmus von Moore auf dem DFA A_w aus. Begründungen sind nicht erforderlich.

- Bestimmen Sie die Tiefe T_w von A_w.
- Beschreiben Sie die Äquivalenzklassen $\equiv^i_{A_w}$ für jedes $i \leq T_w$.

Aufgabe 1.3 *Es gibt genau einen minimalen DFA* (3+3+2 Punkte)

$A = (\Sigma, Q_A, \delta_A, q_0^A, F_A)$ und $B = (\Sigma, Q_B, \delta_B, q_0^B, F_B)$ seien zwei äquivalente minimale DFAs. Wir möchten eine bijektive Funktion $f : Q_A \to Q_B$ konstruieren, so dass sich A und B – nach einer Umbenennung der Zustände durch f – als gleich herausstellen.

Wie soll f aussehen? Für jedes Wort $x \in \Sigma^*$ definieren wir

$$f(\delta_A(q_0^A, x)) := \delta_B(q_0^B, x)\,.$$

a) Kann es passieren, dass zwei Worte $x, y \in \Sigma^*$ in A zu demselben Zustand, aber in B zu verschiedenen Zuständen führen? In diesem Fall wäre f nicht wohldefiniert. Zeigen Sie deshalb für alle Worte $x, y \in \Sigma^*$:

Wenn $\delta_A(q_0^A, x) = \delta_A(q_0^A, y)$, dann auch $\delta_B(q_0^B, x) = \delta_B(q_0^B, y)$.

Hinweis: Ein minimaler DFA C stimmt mit seinem Äquivalenzklassenautomaten überein, d.h. alle Klassen der Verschmelzungsrelation $\equiv_C$ sind einelementig. Weiterhin, da A und B äquivalent sind, folgt

$$\delta_A(q_0^A, x) \in F_A \iff \delta_B(q_0^B, x) \in F_B$$

für alle Worte $x \in \Sigma^*$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion f bijektiv ist.

c) Zeigen Sie: Für alle Zustände $p \in Q_A$ und alle Buchstaben $a \in \Sigma$ gilt

$$f(\delta_A(p, a)) = \delta_B(f(p), a)\,.$$