Theoretische Informatik 2

Sommersemester 2017

Georg Schnitger
Philipp Tertel
Hung The Tran

GOETHE UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 5

Ausgabe: 23.05.17
Abgabe: 30.05.17

Für ein Wort $w \in \Sigma^*$ und einen Buchstaben $x \in \Sigma$ bezeichne $|w|_x$ die Anzahl der Positionen von w, in denen x auftritt.

Aufgabe 5.1 *Deterministisch kontextfreie Sprachen* (4+4 Punkte)

(a) Wir betrachten die Sprache D_2 aller wohlgeformter Klammerausdrücke mit „runden“ und „eckigen“ Klammern. Es ist also $D_2 = L(G)$ mit der Grammatik $G = (\Sigma, \{S\}, S, P)$, wobei $\Sigma = \{\, (,), [,] \,\}$ und P aus den Produktionen

$$S \to (S) \mid [S] \mid SS \mid \varepsilon$$

besteht.

Beschreiben Sie einen deterministischen Kellerautomaten, der D_2 akzeptiert.

Kommentar: Der Satz von Chomsky-Schützenberger besagt, dass es für jede kontextfreie Sprache L eine Darstellung der Form $L = h(D_m \cap R)$ gibt, wobei D_m die Dyck-Sprache aller wohlgeformten Klammerausdrücke mit m Klammertypen, R eine reguläre Sprache und h ein Homomorphismus ist. Da DCFLs (deterministic contextfree languages) abgeschlossen unter dem Durchschnitt mit regulären Sprachen sind, gilt somit $L = h(D)$ für eine Sprache $D \in$ DCFL.

Fazit: DCFLs stellen die für Programmiersprachen fundamentalen Klammerungsmöglichkeiten zur Verfügung, CFLs „erhalten Nichtdeterminismus“ über den Homomorphismus h.

(b) Es soll per Beweis durch Widerspruch gezeigt werden, dass die Sprache

$$L = \{\, a^n b^n \,:\, n \in \mathbb{N} \,\} \cup \{\, a^n b^{2n} \,:\, n \in \mathbb{N} \,\}$$

nicht deterministisch kontextfrei ist.

Sei $D = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ ein deterministischer Kellerautomat, der die Sprache L mit Zuständen akzeptiert, es ist also $L(D) = L$. Konstruieren Sie mithilfe von D einen neuen Kellerautomaten A, der die Sprache $L' = \{\, a^n b^n c^n \,:\, n \in \mathbb{N} \,\}$ akzeptiert.

Bitte wenden!

Aufgabe 5.2 *Pumping-Lemma und Abschlusseigenschaften* (4+4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L_1 := \{\, a^i b^j c^k \;:\; i, j, k \in \mathbb{N},\ i < j \text{ und } i < k \,\}$$

nicht kontextfrei ist.

Für welches Wort z sollte man das Pumping-Lemma anwenden?

(b) Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L_2 = \{w \in \{a, b, c\}^* \;:\; |w|_a < |w|_b \text{ oder } |w|_a < |w|_c\,\}$$

kontextfrei, aber nicht deterministisch kontextfrei ist.

Hinweis: Benutzen Sie Abschlusseigenschaften von DCFLs.

Aufgabe 5.3 *Klassen formaler Sprachen* (2+2+2+2 Punkte)

Wir betrachten die Sprachklassen REG der regulären Sprachen, DCFL der deterministisch kontextfreien Sprachen, ECFL der eindeutigen Sprachen, CFL der kontextfreien Sprachen und NCFL der nicht-kontextfreien Sprachen. Es gilt

$$\text{REG} \subset \text{DCFL} \subset \text{ECFL} \subset \text{CFL} \subset \text{NCFL}.$$

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L die kleinste Sprachklasse $\mathcal{K}$ an, zu der L gehört und zeigen Sie, dass $L \in \mathcal{K}$ gilt.

1. $L_1 = \{a^n b^m c^n \;:\; n, m \in \mathbb{N}\,\} \cup \{a^n b^m c^{n+m} \;:\; n, m \in \mathbb{N}\,\}$.

2. $L_2 = \{a^n b^m c^k \;:\; n, m, k \in \mathbb{N} \text{ und } n = m\,\} \cup \{a^n b^m c^k \;:\; n, m, k \in \mathbb{N} \text{ und } n = k\,\}$.

3. $L_3 = \{w \in \{a, b, c\}^* \;:\; |w|_a = |w|_b\,\}$.

4. $L_4 = L(G)$ mit der Grammatik $G = (\{\texttt{i}, \texttt{e}\}, \{S\}, S, P)$ und $P = \big\{\, S \to \texttt{i}\ S \,|\, \texttt{i}\ S\ \texttt{e}\ S \,|\, \varepsilon \,\big\}$.