

Übungsblatt 4

Ausgabe: 08.05.18

Abgabe: 15.05.18

Aufgabe 4.1 *Kontextfrei oder nicht?*

(3+4 Punkte)

- a) Im Streich-Spiel ist ein Wort $w \in \{a, b\}^*$ gegeben. Wir fragen uns, ob es möglich ist w in einer Folge von Zügen in das leere Wort zu überführen. In einem Zug darf irgendein Teilwort, das nur aus a 's oder nur aus b 's besteht, gestrichen werden, solange das Teilwort mindestens die Länge zwei hat.

Die Sprache ST besteht aus allen Worten $w \in \{a, b\}^*$, die sich durch irgendeine Folge von Zügen in das leere Wort überführen lassen.

Beispiel: $w := abbaaaba$ gehört zu ST , denn $w \rightarrow abbba \rightarrow aa \rightarrow \varepsilon$. Andererseits gehört $abbaaab$ nicht zu ST .

Zeigen Sie durch eine Angabe einer kontextfreien Grammatik G , dass ST kontextfrei ist. Eine informelle, aber natürlich überzeugende Begründung für $ST = L(G)$ genügt.

- b) Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und sei

$$L_b := \{a^i b^j c^j : i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}.$$

Zeigen Sie, dass L_b nicht kontextfrei ist.

Hinweis: Wenn L_b kontextfrei wäre, dann gibt es mit Ogdens Lemma eine Pumpingkonstante N . Wählen Sie $z := a^N b^N c^{N+?}$. Welche Positionen in z markieren Sie und welchen Wert wählen Sie für das Fragezeichen, so dass Sie, unabhängig von der Zerlegung $z = uvwxy$, nach geeignetem Aufpumpen aus der Sprache geworfen werden?

Aufgabe 4.2 *Eindeutigkeit – Mehrdeutigkeit*

(4+4 Punkte)

- a) Die Dyck-Sprache D aller wohlgeformten Klammerausdrücke wird sowohl definiert durch die kontextfreie Grammatik $G_1 = (\Sigma, V_1, S_1, P_1)$ mit den Produktionen

$$S_1 \rightarrow (S_1) \mid S_1 S_1 \mid \varepsilon$$

wie auch durch die kontextfreie Grammatik $G_2 = (\Sigma, V_2, S_2, P_2)$ mit den Produktionen

$$S_2 \rightarrow (S_2) S_2 \mid \varepsilon.$$

Welche der Grammatiken ist eindeutig, welche ist mehrdeutig? Beweisen Sie ihre Antwort. (Sie brauchen nicht zu zeigen, dass die jeweilige Grammatik die Dyck-Sprache erzeugt.)

Bitte wenden!

b) Die Grammatik $G = (\Sigma, V, S, P)$ mit dem Terminalalphabet $\Sigma := \{i, e\}$ und den Produktionen

$$S \rightarrow iSeS \mid iS \mid \varepsilon$$

modelliert eine Spezifikation der if-then-else-Anweisung. Leider besitzt das Wort

iie

zwei unterschiedliche Ableitungsbäume.

Entwerfen Sie eine eindeutige Grammatik G_3 für $L(G)$. Eine *informelle* Begründung, warum Ihre Konstruktion funktioniert, ist völlig ausreichend.

Hinweis: In G_2 sollte einem „e“ das nächstliegende linke, offene „i“ zugewiesen werden. Und die Konsequenz: Für eine Produktion der Form „ $Z \rightarrow iXeY$ “ ist zu garantieren, dass X nur if-then-else-Ausdrücke mit derselben Anzahl von i's und e's erzeugt.

Aufgabe 4.3 *Kontextfreie Sprachen auf unären Alphabeten* (4+4+1 Punkte)

Sei $\Sigma = \{1\}$ und sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine kontextfreie Sprache. Wir möchten mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen zeigen, dass L regulär ist.

- a) Sei N die Pumpingkonstante, wenn das Pumping-Lemma für L angewandt wird. Zeigen Sie:
Für jedes $M \geq N$ mit $1^M \in L$ gibt es eine Zahl $1 \leq a_M \leq N$, so dass

$$\{1^{M-a_M}1^{i \cdot a_M} : i \in \mathbb{N}\} \subseteq L.$$

- b) Zeigen Sie, dass $L' := \{1^M \in L : M \geq N\}$ eine *endliche* Vereinigung von Mengen der Form $\{1^b1^{i \cdot a} : i \in \mathbb{N}_{>0}\}$ für Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \leq N$ und $b \geq N - a$ ist.
- c) Zeigen Sie, dass L regulär ist.

Kommentar: L ist also die Vereinigung von „linearen“ Sprachen.