# Paketverlust

- Bei großen Multicast-Aufgaben
  - Versand langer Programmcodes oder
  - Videos hoher Qualität an mehrere hunderttausende Empfänger

  müssen Pakete in Echtzeit beim Empfänger ankommen.
- Nicht-rekonstrierbarer Paketverlust muss drastisch reduziert werden!

Deshalb redundante Kodierung mit den Zielvorgaben:

- Rekonstruktion trotz hohen Paketverlusten.

  Wir geben allerdings keine Worst-Case Garantie, sondern garantieren Rekonstruktion nur mit hoher Wahrscheinlichkeit.
- Superschnelle Kodierungs- und Dekodierungsalgorithmen, um die hohen Bandbreiten von Hochleistungskanälen

  Glasfaser, ATM oder Gigabit Ethernet

  ausnutzen zu können.

# Automobile Data Broadcasting

- Verläßliche Kommunikation mit einer Vielzahl von Empfängern über unsichere Kanäle

  wechselnde Landschaften, Tunnel

  ist ein Schlüsselproblem.
- Eine Rückverbindung zum Empfänger besteht nicht:

  Ein nicht-kompensierbarer Paket-Verlust muss vermieden werden.

# Erasure Kanal

- Für ein Alphabet $\Sigma$ werden Nachrichten der Form

$$(a_1, 1) \cdot (a_2, 2) \cdots (a_i, i) \cdots (a_n, n)$$

(mit $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$) über den Kanal $K$ verschickt.

Das Alphabet $\Sigma$ kann zum Beispiel aus allen Bitfolgen einer bestimmten Höchstlänge bestehen.

- $K$ löscht ein Paket $(a_i, i)$ mit Wahrscheinlichkeit $\leqslant \rho$, unabhängig davon, ob vorher andere Pakete gelöscht wurden.
  - Ist diese Annahme realistisch? Die Löschwahrscheinlichkeiten zeitlich benachbarter Pakete sollten stark korreliert sein!
  - Eine solche Korrelation können wir auflösen, wenn wir „gegen den Kanal randomisieren“, also die Pakete vor dem Versand **zufällig permutieren**.
- Paket $(a_i, i)$ besitzt den Zeitstempel $i$: Der Empfänger weiß also, welche Pakete verloren gegangen sind.

# Tornado Codes

# Tornado Codes: Die Grobstruktur (1/2)

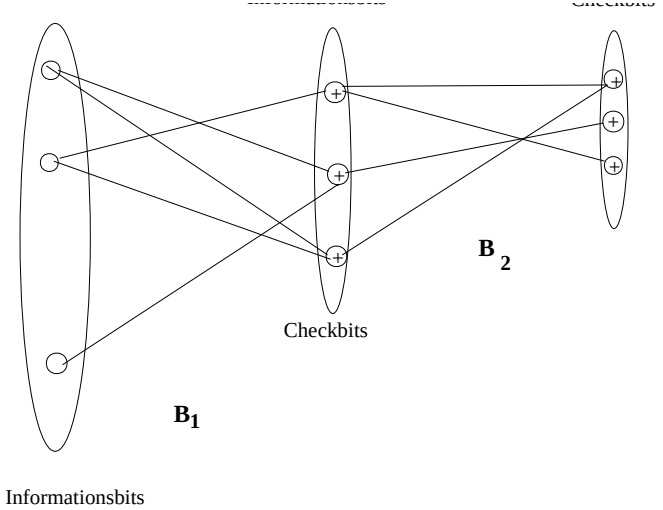
Tornado Codes

- tolerieren hohe Verlustraten und
- bieten superschnelle Kodier- und Dekodieralgorithmen an.

- Um die Beschreibung zu vereinfachen, nehmen wir an, dass jedes Paket nur aus einem Bit und der Paketnummer besteht.
- Der Tornado Code wird durch eine Folge „dünn-besetzter“ bipartiter Graphen $B_i = (U_i, V_i, E_i)$ (mit $|V_i| = \beta \cdot |U_i|$ für $\beta < 1$ und $|E_i| = O(|U_i|)$) definiert.

# Tornado Codes: Die Grobstruktur (2/2)

Die bipartiten Graphen:




- Wenn $|V_k| \leqslant \sqrt{n}$) wird eine Reed-Solomon Kodierung,
  ein fehlerkorrigierender Code, der in quadratischen Zeit kodiert und dekodiert,

  als letzte Kodierungsstufe der Hierarchie eingefügt.
- Die Folge der Informations- und Checkbits ist die Kodierung der Eingabe.

# Die Kodierung

# Informations- und Checkbits

- Die „linken“ Knoten von $B_i$, also die Knoten in $U_i$, heißen **Informationsbits** und
  die „rechten“ Knoten von $B_i$, also die Knoten in $V_i$, **Check-Bits**.

  Die Informationsbits von $B_1$ entsprechen den Eingabebits.
- Für die **Kodierung**:
  1. Berechne zuerst die Werte aller Checkbits von $B_1$ durch **Xoring** der inzidenten Informationsbits von $B_1$.
  2. Sodann interpretiere die rechten Bits von $B_1$ als die Informationsbits von $B_2$:
     - ⋆ Berechnen die Checkbits von $B_2$, also die rechten Knoten von $B_2$, durch Xoring der inzidenten Informationsbits von $B_2$.

  Dieses Verfahren wird für alle bipartiten Graphen wiederholt.

# Die bipartiten Graphen

# Erzeugung der bipartiten Graphen $B_i = (U_i, V_i, E_i)$

Erzeuge $B_i$ für $1 \leqslant i \leqslant m$, wobei $n \cdot \beta^m \leqslant \sqrt{n}$ gelte.

(a) Bestimme Grad-Sequenzen $u = (u_{i,2}, \ldots, u_{i,L}), v = (v_{i,2}, \ldots, v_{i,R})$:
$U_i$, bzw. $V_i$, besitze genau $u_{i,j}$, bzw. $v_{i,j}$, Knoten vom Grad $j$.

$B_i$ besitzt $e_i = \sum_{j=2}^{L} j \cdot u_{i,j} = \sum_{j=2}^{R} j \cdot v_{i,j}$ Kanten.

(b) Setze $U_i^* = \{1, \ldots, e_i\} = V_i^*$ und
bestimme eine zufällige Bijektion $b_i : U_i^* \to V_i^*$.

(c) Konstruktion der Knotenmenge:

- Zerlege $U_i^*$ ($V_i^*$) in beliebiger Weise in $u_{i,j}$ (bzw. $v_{i,j}$) disjunkte Teilmengen der Größe $j$ (für $j = 2, \ldots, L$, bzw. $j = 2, \ldots, R$).
- „Kollabiere“ die erhaltenen Teilmengen auf jeweils einen Knoten und nenne die neuen Knotenmengen $U_i$ und $V_i$.

(d) Verbinde einen Knoten $u \in U_i$ mit einem Knoten in $v \in V_i$, wenn ein Element der Teilmenge von $u$ auf ein Element der Teilmenge von $v$ durch die Bijektion $b$ abgebildet wird.
/* $U_i$ (bzw. $V_i$) besitzt genau $u_{i,j}$ (bzw. $v_{i,j}$) Knoten vom Grad $j$. */

# Zwischenstand: Die offenen Fragen

- Wir haben die bipartiten Graphen $B_i$ eingeführt, haben allerdings die Gradsequenzen nicht spezifiziert.

  **Achtung**: Die Gradsequenzen spielen eine wichtige Rolle!
- Wir haben die „Kodierung durch Xoring“ beschrieben:
  - Die Kodierung gelingt schnell, nämlich in Zeit linear in der Anzahl aller Kanten.
  - Die Anzahl der Kanten sollte also nicht zu groß sein!
- Wie ist zu dekodieren, wenn Bits fehlen?

# Die Dekodierung

# Tornado Codes: Dekodierung

Die kodierte Folge ist nach Verlust einiger Bits zu dekodieren.

1. Beginne die Rekonstruktion mit dem Reed-Solomon Code. Setze $i = m$.
2. Wiederhole, solange es mindestens ein Check-Bit $c$ in $B_i$ mit **genau einem** fehlenden Vorgänger $b_0$ gibt:

   Setze $b_0 = c \oplus b_1 \oplus \cdots \oplus b_k$,
   wobei $b_1, \ldots, b_k$ die vorhandenen Vorgänger von $c$ seien.
3. Wenn ein linker Knoten von $B_i$ nicht korrigiert werden konnte, dann brich mit einer Fehlermeldung ab.
   - Ansonsten, wenn $i = 1$, dann ist die Korrektur geglückt.
   - Wenn $i > 1$, dann setze $i = i - 1$ und wiederhole Schritt (3).

# Die Gradsequenzen

# Die Rolle der Gradsequenzen (1/2)

Warum wählen wir nicht **reguläre** bipartite Graphen,
also Graphen in denen alle linken Knoten denselben Grad und alle rechten Knoten denselben Grad besitzen?

- Vom **Standpunkt eines Informationsbits** (also eines linken Knotens):

  Ein hoher Grad ist hochwillkommen, denn dann bestehen die größten Chancen von irgendeinem der vielen rechten Nachbarn bestimmt zu werden.
- Vom **Standpunkt eines Checkbits** (also eines rechten Knotens):

  Der Grad sollte möglichst klein sein, um höchstens einen fehlenden linken Nachbarn zu besitzen.

Wir versuchen einen Kompromiss und statten wenige linke Knoten mit einem hohen Grad aus.

# Die Rolle der Gradsequenzen (2/2)

Die Rekonstruktion sollte in Wellen verlaufen.

- Die wenigen hochgradigen linken Nachbarn werden sofort rekonstruiert,
- gefolgt von ihren etwas niedrig-gradigeren Kollegen und so weiter.
- Die vielen niedrigst-gradigen linken Knoten werden dann in wenigen letzten Wellen rekonstruiert: Der Tornado produziert rasant wachsende Wellen rekonstruierter linker Knoten.

- Aber wie genau sollten die Gradsequenzen gewählt werden?
- Wir führen zuerst eine Analyse durch.

# Tornado Codes: Die Informationsrate

Die Informationsrate eines Codes ist

$$\frac{\textbf{Eingabelänge}}{\textbf{Codewortlänge}}.$$

- Die Codewortlänge beträgt

$$n + \sum_{i=1}^{m} \beta^i \cdot n + O(\sqrt{n}) = n \cdot \frac{1-\beta^{m+1}}{1-\beta} + O(\sqrt{n}) \leqslant \frac{n}{1-\beta} + O(\sqrt{n}).$$

- Da $n$ Eingabebits vorliegen, erhalten wir die Informationsrate

$$\frac{1-\beta}{1+O(\frac{1-\beta}{\sqrt{n}})}.$$

Und wenn der Kanal ein Bit mit Wahrscheinlichkeit $\rho$ verliert?

# Wann sind Tornado Codes gut?

Wenn der Kanal ein Bit mit Wahrscheinlichkeit $\rho$ verliert:

- Eine Codewortlänge von mindestens $\frac{n}{1-\rho}$ Bits ist notwendig, um den Bitverlust des Kanals zu kompensieren.
- Die optimale Informationsrate beträgt bestenfalls $1 - \rho$.

- Wir machen den Ansatz $\beta = \rho(1 + \varepsilon)$.
- **Wenn** eine Rekonstruktion in jeder Hierarchiestufe $B_i$ mit hoher Wahrscheinlichkeit gelingt:
  - Eine Rekonstruktion gelingt hochwahrscheinlich mit der Rate

$$\frac{1-\beta}{1+O(\frac{1-\beta}{\sqrt{n}})} \approx \frac{1-\rho-\rho\cdot\varepsilon}{1+O(\frac{1-\beta}{\sqrt{n}})} \approx 1-\rho-\rho\cdot\varepsilon.$$

Für $\beta = \rho(1 + \varepsilon)$ und kleinem $\varepsilon$ zeige, dass eine Rekonstruktion hochwahrscheinlich gelingt, selbst wenn ein Anteil $\rho$ aller Bits fehlt.

# Dekodierung: Die Situation

- Wir stellen uns vor, dass ein durch das Löschen von Bits verstümmeltes Codewort $w$ zu dekodieren ist.
  - Die Wahrscheinlichkeit des Löschens einer Bitposition sei $\rho$ und die Löschungen der Positionen seien stochastisch unabhängig.
- Wir nehmen weiterhin an, dass die Rückwärtsdekodierung den bipartiten Graphen $B = B_i$ erreicht hat.
  - Jeder rechte Knoten von $B$ ist entweder bereits vorhanden oder wurde erfolgreich rekonstruiert.

- Sei $v$ ein beliebiger linker Knoten von $B$, dessen Bit verloren ist. Wann können wir das verlorene Bit bestimmen?
- Wir sagen, dass ein rechter Knoten von $B$ **rekonstruiert**, falls höchstens einer seiner linken Nachbarn verloren gegangen ist.

# Die Analyse:
# Und-Oder Bäume

# Rekonstruktion von $v$: UND-ODER Bäume (1/2)

- Wir interpretieren $v$ als einen **ODER-Knoten**:
  - Das Bit von $v$ kann bestimmt werden, wenn $v$ **mindestens einen rekonstruierenden** rechten Nachbarn $w$ besitzt.
- Wann ist ein rechter Nachbar $w$ von $v$ rekonstruierend?
  - Genau dann, wenn **alle** linken Nachbarn von $w$, mit der Ausnahme von $v$, vorhanden sind.

Jeder rechte Nachbar von $v$ spielt die Rolle eines **UND-Knotens**.

Wir haben noch nicht verloren, wenn sich kein rekonstruierender rechter Nachbar von $v$ findet:

„Wer noch kein rekonstruierender Knoten ist,
der kann's noch werden"!

# Rekonstruktion von $v$: UND-ODER Bäume (2/2)

Angenommen, $v$ hat keinen rekonstruierenden rechten Nachbarn.

- Nach der ersten Generation, den rechten Nachbarn von $v$, schauen wir uns die zweite Generation, die Enkelkinder von $v$, an.
  - Auch die Enkelkinder von $v$ lassen sich als ODER-Knoten auffassen:
  - Falls ein Enkelkind $v'$ nicht vorhanden ist, gelingt die Bestimmung des zugehörigen Bits, wenn mindestens einer der rechten Nachbarn von $v'$ rekonstruierend ist.
- Wir wiederholen diesen Prozess, bis wir einen Baum $T_l(v)$ der Tiefe $2l$ erhalten:
  - Der ODER-Knoten $v$ ist die Wurzel, gefolgt von den rechten Nachbarn als UND-Knoten, gefolgt von deren linken Nachbarn (mit Ausnahme von $v$) als ODER-Knoten und so weiter.

Wann kann die Wurzel rekonstruiert werden?

# Der Baum $T_l(v)$

Die Blätter von $T_l(v)$ sind linke Knoten,
die wir mit 0 (nicht vorhanden) oder 1 (vorhanden) beschriften.

- Die Knoten der Tiefe $2l-1$ rekonstruieren genau dann, wenn, bis auf den Elternknoten, **alle** linken Nachbarn vorhanden sind.
  - Ein Knoten der Tiefe $2l-1$ ist rekonstruierend, wenn der Knoten als **UND-Knoten** den Wert 1 berechnet.
- Wann ist ein Knoten $v'$ der Tiefe $2l-2$ vorhanden oder rekonstruierbar?
  - Friere $v'$ auf 1 fest, wenn das entsprechende Bit nicht verloren ist.
  - $v'$ ist genau dann vorhanden oder rekonstruierbar,
    - ★ wenn $v'$ festgefroren ist, oder
    - ★ wenn **mindestens eines** seiner Kinder rekonstruierend ist, (bzw. wenn $v'$ als **ODER-Knoten** den Wert 1 annimmt).

Die Wurzel $v$ ist genau dann vorhanden oder rekonstruierbar, wenn der UND-ODER Baum $T_l(v)$ den Wert 1 berechnet!

# Wie sieht $T_l(v)$ aus? (1/2)

Wähle die Tiefe $2l$ so klein, dass der **induzierte** Teilgraph von $B$ mit hoher Wahrscheinlichkeit ein Baum ist.

- Was ist die Wahrscheinlichkeit $q_j$ (bzw. $p_j$), dass eine Kante in $B$ einen linken (bzw. rechten) Knoten mit einem rechten (bzw. linken) Knoten vom Grad $j$ verbindet?
  - Wir besitzen insgesamt $\sum_{j=2}^{L} j \cdot u_{i,j} = \sum_{j=2}^{R} j \cdot v_{i,j}$ Kanten.
  - Von diesen Kanten verbinden
    - ★ genau $j \cdot v_{i,j}$ Kanten einen linken Knoten mit einem rechten Knoten vom Grad $j$, und
    - ★ genau $j \cdot u_{i,j}$ Kanten einen rechten Knoten mit einem linken Knoten vom Grad $j$.
- Es ist

$$p_j = \frac{j \cdot u_{i,j}}{\sum_{j=2}^{L} j \cdot u_{i,j}} \quad \text{und} \quad q_j = \frac{j \cdot v_{i,j}}{\sum_{j=2}^{R} j \cdot v_{i,j}}.$$

# Wie sieht $T_l(v)$ aus? (2/2)

- Sei $v'$ ein beliebiger Knoten in $T_l(v)$ ungerader Tiefe und $e = (v', u)$ eine Kante zu einem Kind $u$.
  - $v'$ ist ein rechter Knoten und $u$ ein linker Nachbar.
  - Mit Wahrscheinlichkeit $p_j$ verbindet die Kante $e = (v', u)$ den Knoten $v'$ mit einem Knoten vom Grad $j$:
    - Ein innerer Knoten gerader Tiefe besitzt genau $j - 1$ Kinder mit Wahrscheinlichkeit $p_j$.
    - Eine Kante von $u$ wurde bereits vom Elternknoten $v'$ geschluckt.
- Mit analoger Argumentation:

(a) Ein innerer Knoten gerader Tiefe besitzt genau $j - 1$ Kinder mit Wahrscheinlichkeit $p_j$,

(b) ein innerer Knoten ungerader Tiefe besitzt genau $j - 1$ Kinder mit Wahrscheinlichkeit $q_j$.

# Die Bäume $T_l(v)$ als Zufallsprozess

- Die Kinderzahlen entsprechen **nicht** unabhängigen Zufallsvariablen:
  - Wenn bereits viele Knoten mit fixierter Kinderzahl im Baum auftreten, wird diese Kinderzahl entsprechend unwahrscheinlicher,
  - denn unsere bipartiten Graphen besitzen eine festgelegte Anzahl von Knoten für jeden Grad.
- Die Wahrscheinlichkeiten für die Kinderzahlen sind nur als approximativ anzusehen.
- Die Bäume $T_l(v)$ sollten klein bleiben, damit die Approximation nur mit einem kleinen, vernachläßigbaren Fehler behaftet ist.

# Der Baum $T_l(v)$ und der Erasure Kanal

Der Baum $T_l(v)$ ist ein Teilbaum des zufälligen bipartiten Graphen $B$ und somit selbst zufällig:

- Ein ODER-Knoten $v_{\mathrm{ODER}}$ hat mit Wahrscheinlichkeit $p_i$ genau $i-1$ Kinder und
- ein UND-Knoten $u_{\mathrm{UND}}$ mit Wahrscheinlichkeit $q_i$ genau $i-1$ Kinder.

Wir modellieren den zufällig löschenden Erasure Kanal:

- Markiere die Blätter zufällig durch 0 (mit Wahrscheinlichkeit $\rho$) oder durch 1 (mit Wahrscheinlichkeit $1-\rho$).
- Linke Knoten, also Knoten gerader Tiefe, werden ebenfalls mit Wahrscheinlichkeit $1-\rho$ auf den Wert 1 festgefroren.

# Die Evaluierung von UND-ODER Bäume (1/2)

Bestimme die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{Null}_l(\rho)$, dass die angelegte zufällige Eingabe die Ausgabe 0 an der Wurzel produziert.

- Der Wahrscheinlichkeitsraum besteht aus allen Paaren $(T, x)$, so dass
  - $T$ ein zufälliger Baum der Tiefe $2l$ mit den Kinder-Wahrscheinlichkeiten $\vec{p}$ und $\vec{q}$ ist
  - $x$ eine zufällige Eingabe mit $\mathrm{prob}[x_i = 0] = \rho$ für alle Positionen $i$ ist.
- Erstaunlicherweise lässt sich die Wahrscheinlichkeit $\mathrm{Null}_l(\rho)$ leicht rekursiv bestimmen.

# Die Evaluierung von UND-ODER Bäume (2/2)

Für die Verteilungen $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_L)$ und $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_R)$ definiere die Polynome

$$p(x) = \sum_{i=2}^{L} p_i \cdot x^{i-1} \quad \text{und} \quad q(x) = \sum_{i=2}^{R} q_i \cdot x^{i-1}$$

sowie das Iterationspolynom $f(x) = \rho \cdot p(1 - q(1 - x))$.

**Behauptung**: Setze $\text{Null}_0(\rho) = \rho$. Dann ist

$$\text{Null}_{l+1}(\rho) = f(\text{Null}_l(\rho)).$$

# Bestimmung von Null($\rho$)

Es ist $f(\text{Null}_I(\rho)) = \rho \cdot p(1 - q(1 - \text{Null}_I(\rho)))$.

- Betrachte einen UND-Knoten $u$ der Tiefe 1.
  - Der UND-Knoten besitzt $i - 1$ Kinder mit Wahrscheinlichkeit $q_i$.
  - $u$ erhält nur dann der Wert 1, wenn alle $i - 1$ ODER-Kinder den Wert 1 erreichen:
    - ⋆ Dies passiert mit Wahrscheinlichkeit $(1 - \text{Null}_I(\rho))^{i-1}$.
  - $q(1 - \text{Null}_I(\rho))$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein UND-Knoten der Tiefe 1 wahr wird.
- Wann erhält eine Wurzel mit $j - 1$ Kindern den Wert 0?
  - Die Wurzel darf nicht festgefroren sein,
    - ⋆ und dies passiert mit Wahrscheinlichkeit $\rho$,

    **und** kein Kind darf den Wert 1 annehmen,
    - ⋆ und dies passiert mit Wahrscheinlichkeit $(1 - q(1 - \text{Null}_I(\rho)))^{j-1}$.
  - Die Wurzel besitzt $j - 1$ Kinder mit Wahrscheinlichkeit $p_j$ und die Behauptung folgt.

# Wie verhält sich $f$ für kleine Werte?

- Die Polynome $p(x)$ und $q(x)$ haben nicht-negative Koeffizienten: Die Polynome sind monoton wachsend für $x \geqslant 0$.
- Also ist auch $f(x) = \rho \cdot p(1 - q(1 - x))$ monoton wachsend.

Wir möchten erreichen,
dass $\text{Null}_l(\rho) = f^{(l)}(\rho)$ schnell kleine Werte annimmt.

- Wir fordern $f(x) < x$ für $0 < x \leqslant \rho$.
  - In diesem Fall konvergiert die Folge $f^{(l}(\rho)$ gegen Null.
  - Ist die Forderung für $x_0 \leqslant \rho$ verletzt, dann gilt

$$f^{(l)}(x_0) > x_0 \text{ für jedes } l.$$

# Die Gradverteilungen $\vec{p}$ und $\vec{q}$

Für die Verteilungen

$$p_i = \frac{1}{(i-1) \cdot \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{i}}$$

$(i = 2, \ldots, d+1)$ und, für ein geeignetes $\alpha$,

$$q_i = \frac{e^{-\alpha} \cdot \alpha^{i-1}}{(i-1)!}$$

$(i \geqslant 2)$ gilt $f(x) < x$ für $x \leqslant \rho$, falls $\rho \leqslant \beta \cdot \frac{d}{d+1}$.

Für die Argumentation siehe das Skript.

Für jede Bitposition:
Die Wahrscheinlichkeit der erfolglosen Rekonstruktion ist durch eine beliebig kleine Konstante nach oben beschränkt.

Aber das reicht doch nicht!

# Diskussion

Es ist $p_i = \frac{1}{(i-1)\cdot\sum_{i=1}^{d}\frac{1}{i}}$ und $q_i = \frac{e^{-\alpha}\cdot\alpha^{i-1}}{(i-1)!}$ sowie $\rho \leqslant \beta \cdot \frac{d}{d+1}$.

- $\beta$ ist nur unwesentlich größer als $\rho$, falls $d$ hinreichend groß.
  - Wir haben unser Ziel $\beta = \rho \cdot (1+\varepsilon)$ erreicht
  - und die Codewortlänge ist fast optimal.
- Ein linker Knoten besitzt den Grad $i$ mit Wahrscheinlichkeit $\Theta(\frac{1}{\ln(d)} \cdot \frac{1}{i})$, der durchschnittliche Grad ist $\Theta(d/\ln(d))$.
- Nur sehr wenige rechte Knoten von hohem Grad.

Das verbleibende Problem:
Ein kleiner Prozentsatz aller Informationsbits ist nicht rekonstruierbar.

# Aber wir haben Fortschritt erzielt,

denn der Anteil nicht rekonstruierbarer Informationsbits ist klein!

- Füge neue Checkbits für jedes $B_i$ hinzu und verbinde jedes Informationsbit mit genau $g$ neuen Checkbits über linear viele, zufällig eingesetzte Kanten.
- Sei $U'$ die Menge nicht-rekonstruierbarer Informationsbits.
  - $U'$ besitzt mindestens $\frac{g}{2} \cdot |U'| + 1$ Nachbarn:
    Bei zufälliger Kantenwahl wird die **kleine** Menge $U'$ *expandieren*.
  - Es gibt mindestens einen Nachbarn von $U'$, der nur mit genau einem Knoten $u \in U'$ verbunden ist!
    - ⋆ Wenn jeder Nachbar mit mindestens zwei Knoten aus $U'$ verbunden ist, dann kann $U'$ höchstens $\frac{g}{2} \cdot |U'|$ Nachbarn besitzen.
  - Dieser Knoten $u$ ist jetzt rekonstruierbar! Wiederhole das Argument, um vollständige Rekonstruierbarkeit zu erhalten.

# Und in der Praxis?

+ Tornado Codes sind schon bei kurzen Dateien
  um den Faktor 100 schneller in Kodierung und Dekodierung,
  - für lange Dateien wächst der Geschwindigkeitsvorteil auf den Faktor 10.000 an.
- Tornado Codes verstärken sogar den Effekt verfälschter Pakete, allerdings werden Pakete nur äußerst selten verfälscht.

Online Codes, LT (Luby Transform) Codes and Raptor Codes sind Varianten von Tornado Codes.