Komplexitätstheorie

Sommersemester 2013

Prof. Dr. Georg Schnitger,
Dipl. Inf. Bert Besser

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Arbeitsgruppe Theoretische Informatik, Institut für Informatik

# Blatt 6

Ausgabe: 05.06.2012
Abgabe: 12.06.2012

## 6.1. Aufgabe (5+11)

*Größe von Schaltkreisen*

**Satz** (Vorlesung) Die meisten $n$-Bit-Funktionen benötigen Schaltkreise der Größe $\Omega(2^n/n)$.

Zeige, dass jede $n$-Bit-Funktion von einem Schaltkreis mit Fanin zwei und der Größe $s(n)$ berechnet werden kann, wobei

a) $s(n) = O(2^n)$.

*Hinweis:* Verwende den rekursiven Ansatz

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \wedge f(1, x_2, \ldots, x_n)) \vee (\overline{x_1} \wedge f(0, x_2, \ldots, x_n)). \tag{1}$$

b) $s(n) = O(2^n/n)$.

*Hinweis:* Verwende den rekursiven Ansatz aus Teil b) für die ersten $n-k$ Bitpositionen. Ersetze den "Sockel der letzten $k$ Bits" durch einen Schaltkreis $C_k$, der alle möglichen Funktionen auf $k$ Bits berechnet und höchstens $2^{2^k} + o(2^{2^k})$ Gatter hat. Bestimme $k$ so, dass sich eine Größenersparnis zum Schaltkreis aus b) ergibt; beachte, dass $3 \cdot 2^{n-k}$ eine triviale untere Schranke für die Größe des Sockels ist.

## 6.2. Aufgabe (3+5)

*Empfindlichkeit*

**Korollar** (Vorlesung) Ein Schaltkreis der Tiefe $d$ und Größe $g$ berechnet eine Funktion mit Empfindlichkeit höchstens $O(\log_2^{d-1} g)$. $AC^0$-Schaltkreise können also nur Funktionen von maximaler Empfindlichkeit $\log_2^{O(1)} n$ berechnen.

a) Zeige, dass die Empfindlichkeit von MAJORITY $\Theta(\sqrt{n})$ ist.

*Hinweis:* $\binom{n}{n/2} = \Theta(2^n/\sqrt{n})$.

b) Wir betrachten das Multiplikationsproblem $(\sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^{ki}) \cdot (\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^{ki}) = \sum_{i=0}^{2n-1} c_i 2^{ki}$ (von Zahlen mit „0-Lücken" der Länge $k-1$), wobei $k = \lceil \log n \rceil$ und $b = 11\ldots1$ gelte und die $c_i$ Zahlen mit je $k$ Bits seien. Beachte, dass alle 0-Lücken sowie der Vektor $b$ fixiert sind, nur die $a$-Bits sind variabel.

$\mathrm{MIDDLE-BIT_n}$ sei das niedrigstwertige Bit von $c_{n-1}$. Zeige, dass die Empfindlichkeit von $\mathrm{MIDDLE-BIT_n}$ mindestens $n$ beträgt. Beachte, dass $\mathrm{MIDDLE-BIT_n}$ nur von $n$ Eingabebits abhängig ist.

Welche Größe müssen Schaltkreise der Tiefe $d$ für das konventionelle Multiplikationsproblem auf zwei $n$-Bit-Zahlen mindestens haben?